Th.s Toán học - Ks Tin học LÊ HỒNG ĐỨC - Chủ biên
Nhà giáo ưu tú ĐÀO THIỆN KHẢI
LÊ BÍCH NGỌC
LÊ HỮU TRÍ

Để học tốt TOÁN 7

TẬP 1

Tính chất :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a \pm c \pm e}{b \pm d \pm f} = \frac{ma \pm mc \pm me}{mb \pm md \pm mf}$$

- Với Học sinh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo trình hoàn chỉnh về mặt kiến thức, dễ đọc, dễ hiểu.
- Với Thầy, Cô giáo và Phụ huynh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo án hoàn chỉnh về mặt kiến thức và có tính sư phạm để giảng dạy cơ bản và nâng cao theo tư tưởng đổi mới phương pháp dạy học.

ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Th.s Toán học – Ks Tin học LÊ HỒNG ĐỨC – Chủ biên
Nhà giáo ưu tú ĐÀO THIỆN KHẢI
LÊ BÍCH NGỌC
LÊ HỮU TRÍ

ĐỂ HỌC TỐT TOÁN 7

TẬP 1

- Với Học sinh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo trình hoàn chỉnh về mặt kiến thức, dễ đọc, dễ hiểu.
- Với Thầy, Cô và Phụ huynh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo án hoàn chỉnh về mặt kiến thức và có tính sư phạm để giảng dạy cơ bản và nâng cao theo tư tưởng đổi mới phương pháp dạy học

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

GIỚI THIỆU CHUNG

Xin trân trọng giới thiệu tới các Thày, Cô giáo, các Phụ huynh, cùng toàn thể các Em học sinh bộ sách:

RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN THCS

do Thạc sĩ Toán học Lê Hồng Đức chủ biên.

Bộ tài liệu gồm 9 cuốn :

Cuốn 1: Toán 6 — Tập 1
Cuốn 2: Toán 6 — Tập 2
Cuốn 3: Toán 7 — Tập 1
Cuốn 4: Toán 7 — Tập 2
Cuốn 5: Toán 8 — Tập 1
Cuốn 6: Toán 8 — Tập 2
Cuốn 7: Toán 9 — Tập 1
Cuốn 8: Toán 9 — Tập 2
Cuốn 9: 81 đề Toán mẫu luyện thi Tốt nghiệp THCS

Bộ sách được viết theo chương trình sách giáo khoa mới của Bộ Giáo dục và Đào tạo dựa trên một tư tưởng hoàn toàn mới mẻ, có tính sư phạm, có tính tổng hợp cao, tận dụng được đầy đủ thế mạnh của các phương pháp giải Toán THCS.

Mục tiêu của bộ sách:

1. *Cung cấp cho các Thày, Cô giáo, các Phụ huynh một bộ giáo án có chất lượng về mặt sư phạm và chứa đựng đầy đủ kiến thức cơ bản cũng như chuyên sâu, để sau khi tham khảo có thể chuyển đổi ngay thành giáo án mang đi giảng dạy cho học sinh của mình.*

2. *Cung cấp cho các em học sinh THCS yêu thích môn Toán một bộ sách tự học tập dễ hiểu và bổ ích. Nó chắc chắn sẽ trở thành người bạn đồng hành để giúp các Em chủ động hơn trong việc học Toán theo chương trình sách giáo khoa và mở mang kiến thức Toán THCS của bản thân.*

Các cuốn Toán 6, Toán 7, Toán 8, Toán 9 đều có chung một cấu trúc, bao gồm hai phần:

Phần I – Số học

Phần II – Hình học

Mỗi phần chứa dựng các chương (chương I, chương II, ...). Ở mỗi chương chứa dựng các chủ đề (chủ đề 1, chủ đề 2, ...) theo nội dung của sách giáo khoa.

Mỗi chủ đề đều được chia thành 5 mục:

I. *Kiến thức cơ bản*

Trình bày có trật tự nội dung kiến thức liên quan (trong hầu hết các trường hợp chúng được bắt đầu bằng phương pháp đặt vấn đề) cùng với những thí dụ minh hoạ ngay sau đó.

II. *Các ví dụ minh hoạ*

Gồm các ví dụ được tuyển chọn có chọn lọc nhằm giúp hoàn thiện kiến thức cơ bản và nâng cao kỹ năng giải Toán.

III. *Câu hỏi ôn tập lý thuyết*

IV. *Bài tập đề nghị*

V. *Hướng dẫn - Đáp số*

Như vậy, ở mỗi chủ đề:

1. *Với việc trình bày kiến thức cơ bản theo kiểu đặt vấn đề, cùng thí dụ minh hoạ ngay sau đó, sẽ giúp tăng chất lượng bài giảng cho các Thày, Cô giáo. Và với các em học sinh sẽ thấy dễ hiểu kiến thức mới để rồi biết cách trình bày bài. Điều này phù hợp với xu hướng giáo dục mới trong công cuộc cải cách phương pháp dạy và học theo hướng "* ***Lấy học trò làm trung tâm*** *".*
2. *Tiếp đó, tới các ví dụ minh hoạ có chọn lọc, sẽ giúp các Thày, Cô giáo dẫn dắt các em học sinh hoàn thiện kiến thức.*
3. *Đặc biệt là nội dung của các* ***chú ý, nhận xét*** *và* ***yêu cầu*** *sau mỗi kiến thức cùng với một vài thí dụ và ví dụ sẽ giúp các Thày, Cô giáo củng cố những hiểu biết chưa thật thấu đáo cho các em học sinh, cùng với cách nhìn nhận vấn đề đặt ra cho các em học sinh, để trả lời một cách thoả đáng câu hỏi "* ***Tại sao lại nghĩ và làm như vậy ?*** *".*
4. *Ngoài ra, còn có rất nhiều bài toán được giải bằng nhiều cách khác nhau sẽ giúp các học sinh trở nên linh hoạt trong việc lựa chọn phương pháp giải.*

Chúng tôi cũng xin trân trọng cảm ơn các bạn đồng nghiệp đã nhận lời đọc bản thảo, nhận lời tới dự giờ trong các tiết giảng thử của chúng tôi theo giáo trình này ở trên các lớp 6, 7, 8, 9 tại một số trường THCS của Hà Nội và từ đó đóng góp những nhận xét quí báu để giúp chúng tôi tới ngày hôm nay hoàn thiện được bộ sách này.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa. Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

Địa chỉ: Nhóm tác giả Cự Môn do Th.s Toán học Lê Hồng Đức phụ trách
Số 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ - Hà Nội
Điện thoại: (04) 7196671 hoặc 0983046689
E-mail: cumon@hn.vnn.vn hoặc lehongduc39@yahoo.com.

Hà nội, ngày 18 tháng 12 năm 2004

Chủ biên LÊ HỒNG ĐỨC

MỤC LỤC

PHẦN II – HÌNH HỌC

CHƯƠNG I
ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC
ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

CHƯƠNG II
TAM GIÁC

Phần 1

Đại số

CHƯƠNG I - SỐ HỮU TỈ - SỐ THỰC

Trong chương trình học Toán lớp 6, chúng ta đã được làm quen với số nguyên và tự nhiên. Trong chương này chúng ta làm quen tiếp tới số hữu tỉ và số thực.

Đây là những kiến thức rất cơ bản và quan trọng để chúng ta mở rộng thêm vốn kiến thức toán học của mình.

Chương này, bao gồm:

1. Tập hợp Q các số hữu tỉ

2. Phép cộng, trừ số hữu tỉ

3. Phép nhân, chia số hữu tỉ

4. Giá trị tuyệt đối của một số hữu tỉ. Cộng , trừ, nhân, chia số thập phân

5 Luỹ thừa của một số hữu tỉ

6 Tỉ lệ thức

7. Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

8. Số thập phân hữu hạn - Số thập phân vô hạn tuần hoàn

9. Làm tròn số

10. Số vô tỉ - Khái niệm về căn bậc hai

11. Số thực

CHỦ ĐỀ 1 — TẬP HỢP Q CÁC SỐ HỮU TỈ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. SỐ HỮU TỈ

> ***Số hữu tỉ*** *là số viết được dưới dạng phân số* $\frac{a}{b}$ *với* $a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0$.

Tập hợp các số hữu tỉ được kí hiệu là **Q**.

<u>Thí dụ 1:</u> Các số 5 ; - 0, 2 ; 0 ; $3\frac{1}{4}$ đều là các số hữu tỉ.

Giải

Thật vậy, ta có thể viết:

$$5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = \ldots$$ (do đó, mọi số nguyên a đều là những số hữu tỉ)

$$-0,2 = \frac{-0,2.10}{10} = \frac{-2}{10} = \frac{2}{-10} = \frac{-1}{5} = \frac{1}{-5} = \ldots$$

$$0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = \ldots$$

$$3\frac{1}{4} = \frac{3.4 + 1}{4} = \frac{13}{4} = \frac{-13}{-4} = \frac{26}{8} = \ldots$$

Từ đó ta có một số nhận xét sau:

<u>Nhận xét</u>:

1. Tập hợp số hữu tỉ **Q** là tập hợp số nguyên **Z** trong đó phép chia cho một số khác 0 luôn được thực hiện
2. Các phân số bằng nhau xác định cùng một số hữu tỉ và một trong số đó là một đại diện của số hữu tỉ.
3. Mỗi số hữu tỉ được xác định bởi phân số đại diện và các phép toán trên số hữu tỉ đều được xác định trên các phép toán của phân số đại diện.

2. SO SÁNH HAI SỐ HỮU TỈ

Với hai số bất kì $x, y \in \mathbf{Q}$, ta luôn viết được dưới dạng:

$$x = \frac{a}{m} \text{ và } y = \frac{b}{m} \text{ với } m > 0.$$

Từ đó, ta có:

- Nếu $x = y$ thì $a = b$.
- Nếu $x < y$ thì $a < b$.
- Nếu $x > y$ thì $a > b$.

Nhận xét: Vậy, để so sánh hai số hữu tỉ x và y ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Biến đổi x và y về dạng hai phân số có cùng mẫu số dương.

Bước 2: Sử dụng nhận xét trên.

Bước 3: Kết luận.

Thí dụ 2: Hãy so sánh hai số hữu tỉ - 0, 3 và $\frac{-1}{5}$.

Giải

Trước tiên, ta biến đổi hai số - 0,3 và $\frac{-1}{5}$ về dạng phân số có cùng mẫu số:

$$-0{,}3 = \frac{-0{,}3.10}{10} = \frac{-3}{10},$$

$$\frac{-1}{5} = \frac{-1.2}{2.5} = \frac{-2}{10}.$$

Tới đây, ta có nhận xét:

$$-3 < -2 \Leftrightarrow \frac{-3}{10} < \frac{-2}{10} \Leftrightarrow -0{,}3 < \frac{-1}{5}.$$

Vậy, ta được $-0{,}3 < \frac{-1}{5}$.

3. SỐ HỮU TỈ DƯƠNG, ÂM.

Cho $x \in \mathbf{Q}$, ta có:

- $x > 0 \Leftrightarrow$ x là số dương.
- $x < 0 \Leftrightarrow$ x là số âm.
- $x = 0$ thì x không là số âm cũng không là số dương.

Từ đó, ta rút ra một số tính chất sau:

Cho hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$. Ta có:

Tính chất 1. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$, với $b > 0, d > 0$.

Tính chất 2. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$, với $b > 0, d > 0$.

Tính chất 3. $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$, với $b \neq 0$.

Tính chất 4. $-(-\frac{a}{b}) = \frac{a}{b}$, với $b \neq 0$.

Tính chất 5. $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{-a}{b}$, với $b \neq 0$.

Chứng minh:

1. Ta có:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} - \frac{c}{d} < 0 \Leftrightarrow \frac{ad - bc}{bd} < 0.$$

Do, $b > 0$ và $d > 0$ nên $bd > 0$. Suy ra: $ad < bc$

2. Theo *Tính chất 1*, ta có:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow ab + ad < ab + bc$$

$$\Leftrightarrow a(b+d) < b(a+c) \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}. \quad (1)$$

Lại có:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow ad + cd < bc + cd$$

$$\Leftrightarrow d(a+c) < c(b+d) \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

(*Học sinh tự chứng minh tính chất 3, 4 và 5*).

Thí dụ 3: Sử dụng tính chất hãy xem các phân số sau đây có bằng nhau không ?

a. $\frac{-5}{6}$ và $\frac{15}{-18}$.

b. $\frac{12}{7}$ và $\frac{-47}{-28}$.

c. $-\frac{17}{5}$ và $\frac{-5}{3}$.

Giải

a. Ta có:

$$\frac{15}{-18} = \frac{-15}{18} \Rightarrow \frac{-5}{6} = \frac{-15}{18} \text{ vì } (-5).18 = (-15).6 = -90.$$

b. Ta có:

$$\frac{-47}{-28} = \frac{47}{28} \Rightarrow \frac{12}{7} < \frac{47}{28} \text{ vì } 12.28 = 336 < 47.7 = 329.$$

c. Ta có:

$$-\frac{17}{5} = \frac{-17}{5} \Rightarrow \frac{-5}{3} > \frac{-17}{5} \text{ vì } (-5).5 = -25 > (-17).3 = -51.$$

Chú ý: Trong câu b, nếu ta nhận xét rằng:

$$\frac{12}{7} > \frac{-47}{-28}$$

vì:

$$12.(-28) = -336 < (-47).7 = -329 \text{ là hoàn toàn sai.}$$

Do vậy, khi so sánh hai phân số ta phải biến đổi phân số với mẫu số dương thì mới áp dụng được *Tính chất 1* và *Tính chất 2*.

4. BIỂU DIỄN SỐ HỮU TỈ TRÊN TRỤC SỐ

Tương tự như số nguyên, ta có thể biểu diễn mọi số hữu tỉ trên trục số. Ta làm như sau:

Giả sử, cần biểu diễn số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ với a, b$\in$**Z**, b $\neq$ 0. Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chia đoạn thẳng đơn vị thành b phần bằng nhau. Lấy một đoạn làm đơn vị mới thì đơn vị mới bằng $\frac{1}{b}$ đơn vị cũ.

Bước 2: Biểu diễn a theo đơn vị mới.

Nhận xét: 1. Các điểm hữu tỉ dương nằm bên phải điểm 0, các điểm hữu tỉ âm nằm bên trái điểm 0.

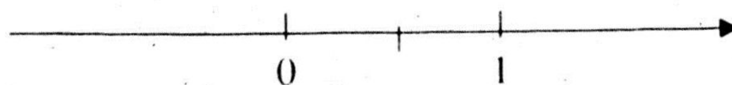
2. Giữa hai số hữu tỉ phân biệt bao giờ cũng có một số hữu tỉ khác chúng. Ta nói: " ***Tập hợp số hữu tỉ Q có tính chất trù mật***".

3. Phần nguyên của số hữu tỉ x (kí hiệu: [x]) là một số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Tức là:

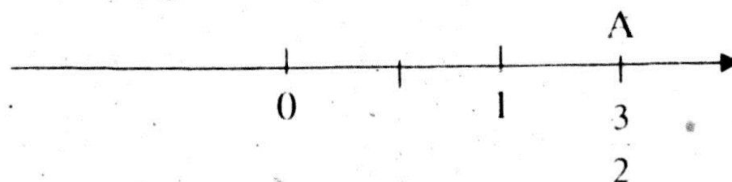
$$[x] \le x < [x] + 1.$$

Thí dụ 4: Để biểu diễn số hữu tỉ $\frac{3}{2}$ ta thực hiện theo các bước:

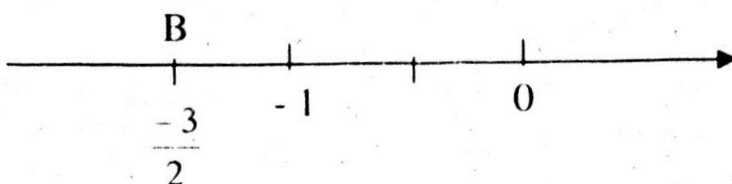
a. Chia đoạn thẳng đơn vị thành hai phần bằng nhau, lấy một đoạn làm đơn vị mới. Ta được:



b. Biểu diễn 3 theo đơn vị mới. Do đó số hữu tỉ $\frac{3}{2}$ được biểu diễn bằng điểm A nằm ở bên phải điểm 0 và cách điểm 0 một đoạn bằng 3 đơn vị mới.



Thí dụ 5: Tương tự, ta biểu diễn được số hữu tỉ $-\frac{3}{2}$ như sau:



Vậy, số hữu tỉ $\frac{-3}{2}$ được biểu diễn bằng điểm B nằm ở bên trái điểm 0 và cách điểm 0 một đoạn bằng 3 đơn vị mới.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Viết 3 đại diện của mỗi số hữu tỉ sau rồi nêu dạng tổng quát của nó:

$$x_1 = -6\ ;\ x_2 = -\frac{7}{3}\ ;\ x_3 = \frac{5}{12}\ ;\ x_4 = -1{,}25\ ;\ x_5 = \frac{6}{4}.$$

Giải

Ta có:

$$x_1 = -6 = \frac{-6}{1} = \frac{-12}{2} = \frac{-24}{4} = ... = \frac{-6k}{k}\ (k \in \mathbf{Z}, k \neq 0).$$

$$x_2 = -\frac{7}{3} = \frac{-14}{6} = \frac{14}{-6} = \frac{-35}{15} = ... = \frac{-7k}{3k}\ (k \in \mathbf{Z}, k \neq 0).$$

$$x_3 = \frac{5}{12} = \frac{-5}{-12} = \frac{-10}{-24} = \frac{15}{36} = ... = \frac{5k}{12k}\ (k \in \mathbf{Z}, k \neq 0).$$

$$x_4 = -1{,}25 = \frac{-5}{4} = \frac{10}{-8} = \frac{-15}{12} = \frac{-5k}{4k}\ (k \in \mathbf{Z}, k \neq 0).$$

$$x_5 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = \frac{-3}{-2} = \frac{12}{8} = ... = \frac{3k}{2k}\ (k \in \mathbf{Z}, k \neq 0).$$

Nhận xét: Như vậy, để chỉ ra được dạng tổng quát của một số hữu tỉ x, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Biến đổi x về dạng phân số tối giản, giả sử:

$$x = \frac{m}{n}.$$

Bước 2: Khi đó, dạng tổng quát của x là:

$$x = \frac{m.k}{n.k},\ \text{với } k \in \mathbf{Z}, k \neq 0.$$

Ví dụ 2: Cho $x = \frac{a}{m}$, $y = \frac{b}{m}$, biết a, b, m $\in \mathbf{Z}$, m > 0 và x < y. Hãy chứng tỏ rằng:

$$x < \frac{a+b}{2m} < y.$$

Giải

Viết lại x, y dưới dạng có cùng mẫu số bằng 2m:

$$x = \frac{2a}{2m},\ y = \frac{2b}{2m}.$$

Từ giả thiết x < y ta được:

$$\frac{a}{m} < \frac{b}{m} \Leftrightarrow a < b. \qquad (1)$$

Khi đó:

- Cộng hai vế của (1) với a, ta được:

$$a + a < b + a \Leftrightarrow 2a < a + b$$

$$\Rightarrow \frac{2a}{2m} < \frac{a+b}{2m} \Leftrightarrow x < \frac{a+b}{2m}. \qquad (2)$$

- Cộng hai vế của (1) với b, ta được:

$$a + b < b + b \Leftrightarrow a + b < 2b$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2m} < \frac{2b}{2m} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2m} < y. \qquad (3)$$

Từ (2), (3) ta suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 3: Cho a, b $\in \mathbb{Z}$ và b > 0. So sánh hai số hữu tỉ:

$$\frac{a}{b} \text{ và } \frac{a+1}{b+1}.$$

Giải

Để so sánh $\frac{a}{b}$ và $\frac{a+1}{b+1}$ ta đi so sánh hai số a(b + 1) và b(a + 1).

Xét hiệu:

$$a(b + 1) - b(a + 1) = ab + a - (ab + b) = a - b.$$

Ta có ba trường hợp, với điều kiện b > 0:

Trường hợp 1: Nếu a — b = 0 ⇔ a = b thì:

$$a(b + 1) - b(a + 1) = 0 \Leftrightarrow a(b + 1) = b(a + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b+1)}{b(b+1)} = \frac{b(a+1)}{b(b+1)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+1}{b+1}.$$

Trường hợp 2: Nếu a — b < 0 ⇔ a < b thì:

$$a(b + 1) - b(a + 1) < 0 \Leftrightarrow a(b + 1) < b(a + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b+1)}{b(b+1)} < \frac{b(a+1)}{b(b+1)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}.$$

Trường hợp 3: Nếu a — b > 0 $\Leftrightarrow$ a > b thì:

$$a(b+1) - b(a+1) > 0 \Leftrightarrow a(b+1) > b(a+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b+1)}{b(b+1)} > \frac{b(a+1)}{b(b+1)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+1}{b+1}$$

Nhận xét: Với phương pháp được minh hoạ trong ví dụ trên chúng ta có thể đi thực hiện bài toán tổng quát hơn, cụ thể:

*"Cho a, b, n $\in$ **Z** và b, n > 0. So sánh hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ và $\frac{a+n}{b+n}$".*

Khi đó ta có lập luận tương tự như sau:

Để so sánh $\frac{a}{b}$ và $\frac{a+n}{b+n}$ ta đi so sánh hai số:

a(b + n) và b(a + n).

Xét hiệu:

$$a(b+n) - b(a+n) = ab + an - (ab + bn) = an - bn = n(a - b).$$

Ta có ba trường hợp, với điều kiện b, n > 0:

Trường hợp 1: Nếu n(a - b) = 0 <> a = b thì:

$$a(b+n) - b(a+n) = 0 \Leftrightarrow a(b+n) = b(a+n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b+n)}{b(b+n)} = \frac{b(a+n)}{b(b+n)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+n}{b+n}$$

Trường hợp 2: Nếu n(a - b) < 0 <> a < b thì:

$$a(b+n) - b(a+n) < 0 \Leftrightarrow a(b+n) < b(a+n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b+n)}{b(b+n)} < \frac{b(a+n)}{b(b+n)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+n}{b+n}.$$

Trường hợp 3: Nếu n(a - b) > 0 <> a > b thì:

$$a(b+n) - b(a+n) > 0 \Leftrightarrow a(b+n) > b(a+n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b+n)}{b(b+n)} > \frac{b(a+n)}{b(b+n)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+n}{b+n}.$$

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Số hữu tỉ là gì ?

Câu hỏi 2: Vì sao các số 1,2; - 1,75; 0; $6\frac{3}{4}$ là những số hữu tỉ ?

Câu hỏi 3: Số nguyên a có phải là số hữu tỉ không ? Vì sao ?

Câu hỏi 4: Trình bày cách biểu diễn một số hữu tỉ trên trục số.

Câu hỏi 5: Trình bày các bước thực hiện để so sánh hai số hữu tỉ x và y.

Câu hỏi 6: Trình bày các bước thực hiện để chỉ ra được dạng tổng quát của một số hữu tỉ x.

Câu hỏi 7: Nêu định nghĩa số hữu tỉ âm, số hữu tỉ dương. Số 0 là số hữu tỉ âm hay dương ?

Câu hỏi 8: Chứng minh các tính chất sau:

Tính chất 1. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$, với $b > 0, d > 0$.

Tính chất 2. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$, với $b > 0, d > 0$.

Tính chất 3. $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$, với $b \neq 0$.

Tính chất 4. $-\left(-\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}$, với $b \neq 0$.

Tính chất 5. $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{-a}{b}$, với $b \neq 0$.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tap 1. So sánh các số hữu tỉ:

a. $\frac{-15}{16}$ và $\frac{5}{-8}$.

b. $\frac{13}{9}$ và $\frac{-16}{-3}$.

c. $-\frac{7}{3}$ và $\frac{-6}{5}$.

d. $\frac{2}{3}$ và $\frac{6}{7}$.

Bài tập 2. Sắp xếp các số hữu tỉ sau đây theo thứ tự tăng dần.

$$-0{,}25\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ -0{,}5\ ;\ \frac{5}{6}\ ;\ \frac{13}{12}\ ;\ \frac{-5}{24}\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{48}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{-9}{8}.$$

Bài tập 3. Chứng minh rằng với mọi $b > 0$, ta có:

a. $\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a > b$.

b. $\frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b$.

Bài tập 4. Viết 5 đại diện của mỗi số hữu tỉ sau rồi nêu dạng tổng quát của nó:

$$x_1 = -2,5 \ ; \ x_2 = \frac{5}{6} \ ; \ x_3 = \frac{-7}{5},$$

$$x_4 = -0,36 \ ; \ x_5 = \frac{-9}{-25} \ ; \ x_6 = \frac{27}{6}.$$

Bài tập 5. Cho hai số hữu tỉ:

$$x = \frac{2a+7}{5} \text{ và } y = \frac{3b-8}{-5}.$$

Với giá trị nào của a, b thì:

a. x và y là số dương.

b. x và y là số âm.

c. x và y không là số dương và cũng không là số âm.

Bài tập 6. So sánh số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbf{Z}$, $b \neq 0$) với số 0, biết:

a. Hai số a, b cùng dấu.

b. Hai số a, b khác dấu.

Bài tập 7. Cho $a, b \in \mathbf{Z}$, $b > 0$, so sánh hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ và $\frac{a+2005}{b+2005}$.

Bài tập 8. Tìm $x \in \mathbf{Q}$, biết rằng x là số âm lớn nhất được viết bằng ba chữ số 1.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ.

Bài tập 1. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 2. Ta viết lại các số hữu tỉ dưới dạng:

$$-0,25 = \frac{-12}{48} \ ; \ \frac{1}{2} = \frac{24}{48} \ ; \ -0,5 = \frac{-24}{48} \ ; \ \frac{5}{6} = \frac{40}{48} \ ;$$

$$\frac{13}{12} = \frac{52}{48} \ ; \ \frac{-5}{24} = \frac{-10}{48} \ ; 0 = \frac{0}{48} \ ; \ \frac{2}{3} = \frac{32}{48} \ ; \ \frac{-9}{8} = \frac{-54}{48}$$

Ta được:

$$\frac{-54}{48} < \frac{-24}{48} < \frac{-12}{48} < \frac{-10}{48} < 0 < \frac{1}{48} < \frac{24}{48} < \frac{32}{48} < \frac{40}{48} < \frac{52}{48}$$

Vậy, ta được một dãy số hữu tỉ sắp xếp theo thứ tự tăng dần:

$$\frac{-9}{8} \ ; -0,5 \ ; -0,25 \ ; \ \frac{-5}{24} \ ; 0 \ ; \ \frac{1}{48} \ ; \ \frac{1}{2} \ ; \ \frac{2}{3} \ ; \ \frac{5}{6} \ ; \ \frac{13}{12}.$$

Bài tập 3. *Hướng dẫn*: Xem lại phần chứng minh tính chất 1.

Bài tập 4. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 5.

a. x và y là số dương khi:

$$a > \frac{-7}{2} \text{ và } b < \frac{8}{3}.$$

b. x và y là số âm khi:

$$a < \frac{-7}{2} \text{ và } b > \frac{8}{3}.$$

c. x và y không là số dương và cũng không là số âm khi:

$$a = \frac{-7}{2} \text{ và } b = \frac{8}{3}.$$

Bài tập 6.

a. Với a, b cùng dấu thì $\frac{a}{b} > 0$

b. Với a, b khác dấu thì $\frac{a}{b} < 0$.

Bài tập 7. Để so sánh $\frac{a}{b}$ và $\frac{a+2005}{b+2005}$ ta đi so sánh hai số $a(b + 2005)$ và $b(a + 2005)$.

Xét hiệu:

$$a(b + 2005) - b(a + 2005) = ab + 2005a - (ab + 2005b)$$
$$= 2005(a - b).$$

Ta có ba trường hợp, với điều kiện $b > 0$:

Trường hợp 1: Nếu $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$ thì:

$$a(b + 2005) - b(a + 2005) = 0 \Leftrightarrow a(b + 2005) = b(a + 2005)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b+2005)}{b(b+2005)} = \frac{b(a+2005)}{b(b+2005)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+2005}{b+2005}.$$

Trường hợp 2: Nếu $a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$ thì:

$$a(b + 2005) - b(a + 2005) < 0 \Leftrightarrow a(b + 2005) < b(a + 2005)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b+2005)}{b(b+2005)} < \frac{b(a+2005)}{b(b+2005)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+2005}{b+2005}.$$

Trường hợp 3: Nếu a — b > 0 ⇔ a > b thì:

$$a(b + 2005) - b(a + 2005) > 0 \Leftrightarrow a(b + 2005) > b(a + 2005)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b + 2005)}{b(b + 2005)} > \frac{b(a + 2005)}{b(b + 2005)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} > \frac{a + 2005}{b + 2005}$$

Nhóm Cự Môn chúng tôi đã và đang theo đuổi mục tiêu viết ra được một bộ giáo trình Toán phổ thông (PTCS và PTTH) với nội dung bao gồm:

1. *Đầy đủ các kiến thức theo quy chuẩn của BGD và ĐT.*
2. *Kiến thức được trình bày theo kiểu đặt vấn đề và các yêu cầu hành động để thay đổi kiểu dạy học theo lối thụ động.*
3. *Sau mỗi chủ đề kiến thức đều có phần hướng dẫn sử dụng máy tính Casio Fx570 Ms hoặc các phần mềm máy vi tính để trợ giúp cho việc giải toán (giảm thiểu các bài toán tính toán phức tạp).*
4. *Những chủ đề kiến thức cần thiết sẽ được chia nhỏ thành phần lý thuyết và các dạng toán để giúp cho việc dạy và học nâng cao.*
5. *Có đĩa CD kèm theo để:*
   - *Giáo viên có thể thực hiện bài giảng bằng máy chiếu.*
   - *Học sinh có thể học ngay trên máy tính.*

Do vậy, chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp có tính xây dựng của tất cả các Thày giáo, Cô giáo, Nhà nghiên cứu, Phụ huynh và Học sinh trên toàn quốc.

CHỦ ĐỀ 2 CỘNG, TRỪ SỐ HỮU TỈ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. CỘNG, TRỪ HAI SỐ HỮU TỈ

Chúng ta sẽ bắt đầu ngay được với thí dụ sau:

Thí dụ 1: Thực hiện phép toán x + y và x — y, biết x = 0,25 và y = $\frac{1}{6}$.

Giải

Trước tiên chúng ta chuyển x về dạng số hữu tỉ:

$$x = 0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}.$$

Khi đó:

$x + y = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ → *Đây là phép cộng hai phân số không cùng mẫu*

$$= \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}.$$

$x - y = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$ → *Đây là phép trừ hai phân số không cùng mẫu*

$$= \frac{3}{12} - \frac{2}{12} = \frac{3-2}{12} = \frac{1}{12}.$$

Từ thí dụ này chúng ta có được quy tắc sau:

Để cộng, trừ hai số hữu tỉ x, y ta làm như sau:

Bước 1: *Viết x, y dưới dạng hai phân số có cùng mẫu số dương:*

$$x = \frac{a}{m} \text{ và } y = \frac{b}{m}.$$

Bước 2: *Thực hiện phép cộng, trừ:*

$$x + y = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}.$$

$$x - y = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}.$$

Nhận xét:

1. Hiệu của hai số hữu tỉ x và y là tổng của x với số đối của y.
2. Phép cộng, trừ các số hữu tỉ không phụ thuộc vào việc chọn phân số đại diện cho chúng. Vì vậy, khi cộng trừ các số hữu tỉ có mẫu khác nhau, ta quy đồng mẫu rồi thực hiện phép cộng, trừ các số hữu tỉ có cùng mẫu.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}.$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd}.$$

3. Số đối của số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ là $\frac{-a}{b}$ (hoặc $\frac{a}{-b}$).
4. Phép cộng trong **Q** cũng có các tính chất cơ bản như phép cộng trong **Z**, bao gồm: giao hoán, kết hợp, cộng với phần tử trung lập, cộng với số đối.
5. Vì tổng, hiệu của hai số hữu tỉ là một số hữu tỉ nên từ một số hữu tỉ chúng ta có thể tách nó thành tổng hoặc hiệu của hai số hữu tỉ nào đó (suy luận ngược), điều này đặc biệt quan trọng khi thực hiện các phép tính tổng - *Trong phần các ví dụ minh hoạ chúng ta sẽ quan tâm nhiều hơn tới ý tưởng này.*

Thí dụ 2: Hãy thực hiện các phép tính:

a. $\frac{1}{2} + \frac{2}{-5}$.

b. $\frac{3}{7} - \frac{2}{3}$.

Giải

a. Ta có:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{-5} = \frac{1}{2} + \frac{-2}{5} = \frac{5 + (-2).2}{2.5} = \frac{1}{10}.$$

b. Ta có:

$$\frac{3}{7} - \frac{2}{3} = \frac{3.3 - 2.7}{7.3} = \frac{-5}{21}.$$

2. QUY TẮC CHUYỂN VẾ

Tương tự như trong tập hợp số nguyên, trong tập hợp số hữu tỉ ta cũng có quy tắc chuyển vế:

> *Khi chuyển vế một số hạng từ vế này sang vế kia của một đẳng thức, ta phải đổi dấu số hạng đó.*
>
> *Với mọi x, y, z ∈ **Q** :*
>
> $$x + y = z \Leftrightarrow x = z - y.$$

Thí dụ 3: Tìm x, biết:

$$\frac{1}{2} + x = \frac{2}{-5}.$$

Giải

Ta có:

$$\frac{1}{2} + x = \frac{2}{-5} \Rightarrow x = \frac{2}{-5} - \frac{1}{2} = \frac{-2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{(-2).2 - 1.5}{5.2} = \frac{-9}{10}.$$

Vậy, ta nhận được $x = \frac{-9}{10}$.

Chú ý: Trong **Q** ta cũng có những tổng đại số, trong đó ta cũng có thể đổi chỗ các số hạng, nhóm một số số hạng bằng các dấu ngoặc kèm theo quy tắc đổi dấu.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = 2\frac{3}{2} - 3\frac{3}{5} + \frac{1}{4}$.

b. $B = 5\frac{2}{7} - 8\frac{1}{3} + \frac{1}{21}$.

Giải

a. Ta có:

$$A = 2\frac{3}{2} - 3\frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{7}{2} - \frac{18}{5} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{7.10 - 18.4 + 1.5}{20} = \frac{70 - 72 + 5}{20} = \frac{3}{20}.$$

b. Ta có:

$$B = 5\frac{2}{7} - 8\frac{1}{3} + \frac{1}{21} = \frac{37}{7} - \frac{25}{3} + \frac{1}{21}$$

$$= \frac{37.3 - 25.7 + 1}{21} = \frac{111 - 175 + 1}{21} = \frac{-63}{21} = -3.$$

Nhận xét: Trong ví dụ trên, các số hữu tỉ được cho dưới dạng *hỗn số*, chính vì vậy chúng ta trước tiên cần chuyển nó về dạng phân số, các em học sinh cần nhớ công thức đổi:

$$a\frac{b}{c} = \frac{a.c + b}{c} \text{ (hoặc } a\frac{b}{c} = a + \frac{b}{c}\text{) với } a > 0.$$

Ví dụ 2: Tìm x, biết:

a. $x + \frac{4}{9} = \frac{-5}{7}$.

b. $\frac{1}{23} - x = \frac{1}{7}$.

Giải

a. Ta có:

$$x + \frac{4}{9} = \frac{-5}{7} \Leftrightarrow x = \frac{-5}{7} - \frac{4}{9} = \frac{(-5).9 - 4.7}{63} = \frac{-73}{63}.$$

b. Ta có:

$$\frac{1}{23} - x = \frac{1}{7} \Leftrightarrow -x = \frac{1}{7} - \frac{1}{23} = \frac{1.23 - 1.7}{7.23} = \frac{15}{161}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-15}{161}.$$

Ví dụ 3: Viết số hữu tỉ $\frac{5}{12}$ dưới các dạng sau đây:

a. Tổng của một số hữu tỉ dương và một số hữu tỉ âm.

b. Tổng của hai số hữu tỉ dương trong đó một số là $\frac{1}{4}$.

Giải

a. Ta có thể lựa chọn:

$$\frac{5}{12} = \frac{7 + (-2)}{12} = \frac{7}{12} + \frac{-2}{12}.$$

Giả sử số hữu tỉ còn lại cần tìm là x, ta được:

$$\frac{5}{12} = x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{5-3}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

Vậy, ta có biểu diễn:

$$\frac{5}{12} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4}.$$

Chú ý: Việc tách một số hữu tỉ thành hiệu của hai số hữu tỉ (hoặc gọi là tổng của hai số hữu tỉ trái dấu) mang một ý nghĩa quan trọng, nó được sử dụng rất nhiều trong những dạng toán tính tổng. Ví dụ sau sẽ minh hoạ việc sử dụng phép tách cho số:

$$\frac{1}{k.(k+1)} = \frac{1}{k.} - \frac{1}{k+1} \text{ với } k \in \mathbf{N}^*.$$

Ví dụ 4: Tính:

$$S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{999.1000}.$$

Giải

Nhận thấy rằng với $k \in \mathbf{N}^*$, ta luôn có:

$$\frac{1}{k.(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k.(k+1)} = \frac{k+1}{k.(k+1)} - \frac{k}{k.(k+1)} = \frac{1}{k.} - \frac{1}{k+1}.$$

Suy ra, ta có:

$$\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

.

$$\frac{1}{999.1000} = \frac{1}{999} - \frac{1}{1000}.$$

Vậy, ta được:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{999} - \frac{1}{1000} = 1 - \frac{1}{1000} = \frac{999}{1000}.$$

Nhận xét: 1. Khi gặp bài toán này, rất nhiều em học sinh tỏ ra lúng túng, bởi nghĩ rằng:

$$\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1}.\frac{1}{2}$$

tức là, cần có kiến thức về phép nhân hai số hữu tỉ (kiến thức này chưa học), tuy nhiên ở đây chúng ta đã sử dụng phép tách một số hữu tỉ thành hiệu của hai số.

2. Với phương pháp thực hiện tương tự như trên, chúng ta sẽ có được kết quả tổng quát:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Ví dụ 5: Tìm [x] biết:

a. $x - \frac{8}{5} < -6 < x$.

b. $-1\frac{1}{4} < x + \frac{2}{3}$ và $x < -\frac{1}{4}$.

Giải

a. Ta có:

$$x - \frac{8}{5} < -6 \Rightarrow x < -6 + \frac{8}{5} \Rightarrow x < -\frac{22}{5} = -4\frac{2}{5}.$$

Suy ra: $-6 < x < -\frac{22}{5}$.

Vậy, [x] = - 5.

b. Ta có:

$$-1\frac{1}{4} < x + \frac{2}{3} \Rightarrow x + \frac{2}{3} > -1\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x > -1\frac{1}{4} - \frac{2}{3} = \frac{-(1.4+1)}{4} - \frac{2}{3} = \frac{-5.3-2.4}{12} = \frac{-23}{12} = -1\frac{11}{12}$$

$$\Rightarrow x > -1\frac{11}{12}.$$

Suy ra:

$$-1\frac{11}{12} < x < -\frac{1}{4}.$$

Vậy, ta được [x] = - 1.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Trình bày các bước thực hiện để cộng, trừ hai số hữu tỉ x và y.

Câu hỏi 2: Phát biểu quy tắc chuyển vế.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = \frac{-5}{7} + \frac{7}{-5} + \frac{4}{7} + \frac{7}{4}$.

b. $B = \frac{2}{-5} + \frac{-3}{7} + \frac{-7}{10} + \frac{3}{-8}$.

c. $C = \frac{-5}{7} + \frac{2}{-7} + \frac{4}{-9} + \frac{4}{9}$.

d. $D = \left(3 - \frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) - \left(2 + \frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(1 - \frac{7}{3} - \frac{9}{2}\right)$.

Bài tập 2. Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = 1\frac{1}{8} - \frac{8}{9} + \frac{3}{25} + \frac{1}{4} - \frac{5}{16} + \frac{19}{25} - \frac{1}{9} + \frac{2}{25} - \frac{1}{81}$.

b. $B = \frac{-1}{3} - \frac{8}{35} + \frac{-2}{9} - \frac{1}{135} + \frac{4}{5} + \frac{-4}{9} + \frac{3}{7}$.

Bài tập 3. Tìm x, biết:

a. $x - \frac{2}{35} = \frac{-3}{25}$.

b. $\frac{-2}{9} - x = \frac{1}{3}$.

c. $\frac{11}{12} - \left(x + \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{3}$.

d. $\frac{5}{4} - \left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Bài tập 4. Tìm [x] biết:

a. $x - \frac{2}{35} = 1$.

b. $\frac{9}{2} - x > \frac{1}{3}$.

c. $2 + x < \frac{5}{6} < x + 3$.

d. $x < -\frac{7}{4} < x + \frac{2}{7}$.

Bài tập 5. Điền số nguyên thích hợp vào ô trống:

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) < \square < \frac{1}{48} - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{6}\right).$$

Bài tập 6. Viết số hữu tỉ $\frac{7}{20}$ dưới các dạng sau đây:

a. Tổng của một số hữu tỉ dương và một số hữu tỉ âm.

b. Tổng của hai số hữu tỉ dương trong đó một số là $\frac{1}{4}$.

Bài tập 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{11}{12}.$$

Bài tập 8. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức:

a. $B = -\left(x + \frac{18}{1273}\right)^2 - \frac{183}{121}.$

b. $C = \frac{15}{(x - 8)^2 - 4}.$

c. $D = \frac{4}{(x + \frac{1}{3})^2 + 5}.$

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Ta được:

a. $A = \frac{29}{140}.$

b. $B = 1\frac{253}{280}.$

c. $C = 1.$

Bài tập 2. Ta được:

a. $A = (1\frac{1}{8} - \frac{5}{16} + \frac{1}{4}) - (\frac{8}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{81}) + (\frac{3}{25} + \frac{19}{25} + \frac{2}{25})$

$= 1 - 1 + 1 = 1.$

b. $B = (\frac{-1}{3} + \frac{-2}{9} + \frac{-4}{9}) + (-\frac{8}{35} + \frac{4}{5} + \frac{3}{7}) - \frac{1}{135}$

$= -1 + 1 - \frac{1}{135} = \frac{-1}{135}.$

Bài tập 3. Ta được:

a. $x = \frac{-11}{175}.$

b. $x = \frac{-5}{9}.$

c. $x = \frac{-3}{20}.$

d. $x = \frac{5}{12}.$

Bài tập 4. Ta được:

a. $[x] = 0$.

b. $[x] = 4$.

c. $[x] = -1$ hoặc $[x] = -2$.

d. $[x] = -1$ hoặc $[x] = -2$.

Bài tập 5. Ta đi xác định các giá trị của biểu thức VT và VP, cụ thể:

$$VT = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{4+3}{12} = \frac{1}{2} - \frac{7}{12} = \frac{6-7}{12} = \frac{-1}{12}.$$

$$VP = \frac{1}{48} - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{48} - \frac{1}{16} + \frac{1}{6} = \frac{1-3+8}{48} = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}.$$

Vậy, ta được biểu thức thu gọn:

$$\frac{-1}{12} < \square < \frac{1}{8}$$

do đó, số nguyên cần điền vào là 0.

Bài tập 6. *Học sinh tự giải.*

Bài tập 7. Ta có:

$$\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x \in \mathbf{Q}$$

$$\Rightarrow A = \left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{11}{12} \geq \frac{11}{12} \text{ với mọi } x \in \mathbf{Q}.$$

Vậy $A_{\text{nhỏ nhất}} = \frac{11}{12}$, đạt được khi:

$$\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}.$$

Bài tập 8.

a. Ta có:

$$\left(x + \frac{18}{1273}\right)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x \in \mathbf{Q}$$

$$\Rightarrow -\left(x + \frac{18}{1273}\right)^2 \leq 0 \text{ với mọi } x \in \mathbf{Q}$$

$$\Rightarrow -\left(x + \frac{18}{1273}\right)^2 - \frac{183}{121} \leq 0 - \frac{183}{121} = -\frac{183}{121}$$

Vậy $B_{\text{lớn nhất}} = -\frac{183}{121}$, đạt được khi:

$$\left(x + \frac{18}{1273}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{18}{1273} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{18}{1273}.$$

b. Ta có:

C lớn nhất $\Leftrightarrow$ MS $= (x - 8)^2 - 4$ nhỏ nhất.

Mà, $(x - 8)^2 - 4 \geq -4$ với mọi $x \in \mathbf{Q}$.

Suy ra $MS_{\text{nhỏ nhất}} = -4$.

Vậy, $C_{\text{lớn nhất}} = \frac{-15}{4}$, đạt được khi:

$(x - 8)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 8$.

c. Ta có:

D lớn nhất $\Leftrightarrow$ MS $= (x + \frac{1}{3})^2 + 5$ nhỏ nhất.

Mà, MS $= (x + \frac{1}{3})^2 + 5 \geq 5$ với mọi $x \in \mathbf{Q}$.

Vậy $D_{\text{lớn nhất}} = \frac{4}{5}$, đạt được khi:

$(x + \frac{1}{3})^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$.

CHỦ ĐỀ

3

NHÂN, CHIA SỐ HỮU TỈ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. NHẮC LẠI PHÂN SỐ NGHỊCH ĐẢO

Với mọi $x \in \mathbf{Q}$, $x \neq 0$, nghịch đảo của x (kí hiệu: x^{-1}) là một số hữu tỉ sao cho $x \cdot x^{-1} = 1$.

Nghịch đảo của số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ là $\frac{b}{a}$ với $a, b \in \mathbf{Z}$; $a, b \neq 0$.

Thí dụ 1: Nghịch đảo của $\frac{2}{5}$ là $\frac{5}{2}$ vì:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{2.5}{5.2} = \frac{10}{10} = 1.$$

2. NHÂN HAI SỐ HỮU TỈ

Để thực hiện phép nhân hai số hữu tỉ, chúng ta sử dụng quy tắc sau:

Tích của hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ kí hiệu: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ được xác định như sau:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$$

Thí dụ 2: Ta có:

$$\frac{-5}{6} \cdot 1\frac{1}{4} = \frac{-5}{6} \cdot \frac{5}{4} = \frac{-25}{24}.$$

Nhận xét:

1. Phép nhân hai số hữu tỉ không phụ thuộc vào việc chọn phân số đại diện của chúng.
2. Phép nhân trong **Q** có những tính chất cơ bản giống phép nhân trong **Z**, bao gồm: giao hoán, kết hợp, nhân với phần tử trung hòa, phân phối của phép nhân với phép cộng.

3. CHIA HAI SỐ HỮU TỈ

Để thực hiện phép chia hai số hữu tỉ, chúng ta sử dụng quy tắc sau:

Thương của hai số hữu tỉ $x = \frac{a}{b}$ *và* $y = \frac{c}{d}$ *gọi là tỉ số của x và y, kí hiệu:*

$$x : y = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$$

là phép nhân giữa số bị chia và phân số nghịch đảo của số chia.

$$x : y = x.y^{-1} = \frac{x}{y} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c}.$$

Thí dụ 3: Ta có:

$$\frac{1}{4} : \frac{3}{2} = \frac{1}{4}.\frac{2}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Tính nhanh giá trị của biểu thức sau:

$$A = \frac{0,75 + 0,6 + \frac{3}{7}}{2,75 + 2,2 + \frac{11}{7}}.$$

Giải

Viết lại biểu thức A dưới dạng:

$$A = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{3}{7}}{\frac{11}{4} + \frac{11}{5} + \frac{11}{7}} = \frac{3\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)}{11\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)} = \frac{3}{11}.$$

Ví dụ 2: Thực hiện phép tính:

a. $A = \left(\frac{-6}{11}\right).\left(\frac{5}{7}\right).\left(\frac{-15}{34}\right).\left(\frac{11}{-30}\right).$

b. $B = \left(\frac{-1}{3}\right).\left(\frac{-21}{14}\right).\left(\frac{18}{13}\right).$

Giải

a. Ta có:

$$A = \left(\frac{-6}{11}\right).\left(\frac{5}{7}\right).\left(\frac{-15}{34}\right).\left(\frac{11}{-30}\right) = \left(\frac{-6}{11}.\frac{11}{-30}\right).\left(\frac{5}{7}.\frac{-15}{34}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{5}\right).\left(\frac{-15}{34}\right) = \frac{-7}{34}.$$

b. Ta có:

$$B = \left(\frac{-1}{3}.\frac{-21}{14}\right).\left(\frac{18}{13}\right) = \left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{18}{13}\right) = \frac{9}{13}.$$

Ví dụ 3: Cho biểu thức:

$$A = \frac{2x-3}{5x+1}.$$

Tìm các giá trị của x để:

a. $A = 0$.

b. $A > 0$.

c. $A < 0$.

Giải

a. Ta có:

$$A = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{5x+1} = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Vậy với $x = \frac{3}{2}$ thì $A = 0$.

b. Ta có:

$A > 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{5x+1} > 0 \Leftrightarrow$ tử số và mẫu số phải cùng dấu.

Ta có hai trường hợp sau:

- $\begin{cases} 2x-3>0 \\ 5x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x > \frac{-1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}.$

- $\begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ 5x + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{3}{2} \\ x < -\dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{5}.$

Vậy, với $x > \dfrac{3}{2}$ hoặc $x < \dfrac{-1}{5}$ thì $A > 0$.

c. Ta có:

$$A < 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 3}{5x + 1} < 0 \Leftrightarrow \text{tử số và mẫu số phải khác dấu.}$$

Ta có hai trường hợp sau:

- $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{3}{2} \\ x < -\dfrac{1}{5} \end{cases}.$

Vô lý, do không có số x nào thỏa mãn $x > \dfrac{3}{2}$ và $x < -\dfrac{1}{5}$.

- $\begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ 5x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{3}{2} \\ x > -\dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{5} < x < \dfrac{3}{2}.$

Vậy, với $\dfrac{-1}{5} < x < \dfrac{3}{2}$ thì $A < 0$.

Ví dụ 4: Tìm hai số x và y sao cho:

$$x + y = x.y = \frac{x}{y}, \text{ với } y \neq 0.$$

Giải

Xuất phát từ giả thiết

$$x + y = x.y \Leftrightarrow x = x.y - y = y(x - 1) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = x - 1.$$

(1)

Mặt khác, từ giả thiết ta cũng có:

$$\frac{x}{y} = x + y. \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra:

$$x - 1 = x + y \Leftrightarrow y = -1$$

Khi đó:

$$x - 1 = x(-1) \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy, với $x = \frac{1}{2}$ và $y = -1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 5: Cho $x, y \in \mathbf{Q}$. Chứng minh rằng:

$$-(x.y) = (-x).y = x.(-y)$$

Giải

Ta biểu diễn x, y dưới dạng:

$x = \frac{a}{b}$ và $y = \frac{c}{d}$ với $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ và $b > 0, d > 0$.

$$\Rightarrow -x = \frac{-a}{b} \text{ và } -y = \frac{-c}{d}$$

Ta có thể sử dụng một trong hai cách sau:

Cách 1. Ta có:

$$x.y = \frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}.$$

$$\Rightarrow -(x.y) = \frac{-(a.c)}{b.d} = \frac{(-a).c}{b.d} = \frac{-a}{b}.\frac{c}{d} = (-x).y. \qquad (1)$$

Lại có:

$$-(x.y) = \frac{-(a.c)}{b.d} = \frac{a.(-c)}{b.d} = \frac{a}{b}.\frac{-c}{d} = x.(-y). \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$-(x.y) = (-x).y = x.(-y).$$

Cách 2. Ta có:

$$x.y + (-x).y = \frac{a.c}{b.d} + \frac{(-a).c}{b.d} = \frac{a.c + (-a).c}{b.d} = 0$$

$\Rightarrow$ x.y = (- x).y. (3)

Lại có:

$$x.y + x.(-y) = \frac{a.c}{b.d} + \frac{a.(-c)}{b.d} = \frac{a.c + a.(-c)}{b.d} = 0$$

$\Rightarrow$ x.y = x. (- y). (4)

Từ (3) và (4) suy ra:

- (x.y) = (- x) . y = x . (- y).

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa phân số nghịch đảo.

Câu hỏi 2: Phát biểu quy tắc nhân hai số hữu tỉ.

Câu hỏi 3: Phát biểu quy tắc chia hai số hữu tỉ.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính nhanh giá trị của biểu thức sau:

$$A = \frac{0,75 + 0,6 - \frac{3}{7} - \frac{3}{13}}{2,75 + 2,2 - \frac{11}{7} - \frac{11}{13}}.$$

Bài tập 2. Cho x, y $\in$ **Q**, x $\neq$ 0, y $\neq$ 0. Chứng minh rằng:

a. $(x.y)^{-1} = x^{-1}.y^{-1}$.

b. $(x.y^{-1})^{-1} = x^{-1}.y$.

Bài tập 3. Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = \left(\frac{-8}{19}\right).\left(\frac{25}{34}\right).\left(\frac{-17}{5}\right).\left(\frac{19}{-27}\right)$

b. $B = \left(\frac{-12}{35}\right).\left(\frac{-21}{15}\right).\left(\frac{25}{9}\right)$.

Bài tập 4. Tìm x, biết:

a. $x\left(x-\frac{3}{2}\right)=0.$

b. $\frac{2}{3}+\frac{3}{2}:x=\frac{4}{5}.$

Bài tập 5. Tìm các số nguyên x, thoả mãn:

$$2\frac{3}{11}.1\frac{1}{12}.(-2,2)<x<\left(0,4-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{4}-0,2\right).$$

Bài tập 6. Tìm x, biết:

a. $(x+1)(x-\frac{3}{2})<0.$

b. $(x-2)(x-\frac{1}{2})>0.$

Bài tập 7. Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau nhận giá trị dương.

a. $A=x^2+6.$

b. $B=(5-x)(x+8).$

c. $C=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)}.$

Bài tập 8. Tìm các giá trị của x để:

$$A=\frac{5x+4}{3x-1}.$$

a. $A=0.$

b. $A>0.$

c. $A<0.$

Bài tập 9. Tìm x, biết:

a. $\frac{6}{7}x=\frac{-5}{28}.$

b. $\frac{2}{5}+\frac{1}{4}x=\frac{-3}{10}.$

c. $\left(x+\frac{4}{7}\right)\left(x-\frac{8}{9}\right)=0.$

d. $(3x-2)(2x-\frac{2}{3})=0.$

Bài tập 10. Cho hai biểu thức:

$$A=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)...\left(1-\frac{1}{19}\right)\left(1-\frac{1}{20}\right),$$

$$B=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)...\left(1-\frac{1}{81}\right)\left(1-\frac{1}{100}\right).$$

a. So sánh A với $\frac{1}{21}$.

b. So sánh B với $\frac{11}{21}$.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. $A = \frac{3}{11}$.

Bài tập 2. *Hướng dẫn:*

a. Ta có:

$$(x.y)(x^{-1}.y^{-1}) = 1 \Rightarrow (x.y)^{-1} = x^{-1}.y^{-1}.$$

b. Ta có:

$$(x.y^{-1})(x^{-1}.y) = 1 \Rightarrow (x.y^{-1})^{-1} = x^{-1}.y.$$

Bài tập 3.

a. Ta có:

$$A = \left(\frac{-8}{19}.\frac{19}{-27}\right).\left(\frac{25}{34}.\frac{-17}{5}\right) = \left(\frac{8}{27}\right).\left(\frac{-5}{2}\right) = \frac{-20}{27}.$$

b. Ta có:

$$B = \left(\frac{-12}{35}.\frac{25}{9}\right).\left(\frac{-21}{15}\right) = \left(\frac{-20}{21}\right).\left(\frac{-21}{15}\right) = \frac{-4}{3}.$$

Bài tập 4. *Học sinh tự giải.*

Bài tập 5. Ta có:

$$VT = 2\frac{3}{11}.1\frac{1}{12}.(-2,2) = -5\frac{5}{12},$$

$$VP = \left(0,4 - \frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{4} - 0,2\right) = -0,22.$$

Suy ra:

$$-5\frac{5}{12} < x < -0,22$$

Vậy, các giá trị nguyên của x là - 5, - 4, - 3, - 2, - 1.

Bài tập 6.

a. $-1 < x < \frac{3}{2}$.

b. $x > 2$ hoặc $x < \frac{1}{2}$.

Bài tập 7. Ta được:

a. $A > 0 \Leftrightarrow$ mọi x.

b. $B > 0 \Leftrightarrow -8 < x < 5$.

c. $C > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$ hoặc $x > 3$.

Bài tập 8. Ta được:

a. $A = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4}{5}$.

b. $A > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$ hoặc $x < \frac{-4}{5}$.

c. $A < 0 \Leftrightarrow \frac{-4}{5} < x < \frac{1}{3}$.

Bài tập 9.

a. Ta có:

$$\frac{6}{7}x = \frac{-5}{28} \Leftrightarrow x = \frac{-5}{28} : \frac{6}{7} \Leftrightarrow x = \frac{-5}{24}.$$

b. Ta có:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{4}x = \frac{-3}{10} \Leftrightarrow x = \left(\frac{-3}{10} - \frac{2}{5}\right) : \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-7}{10} : \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-14}{5}.$$

c. Ta có:

$$\left(x + \frac{4}{7}\right)\left(x - \frac{8}{9}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{4}{7} = 0 \\ x - \frac{8}{9} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{4}{7} \\ x = \frac{8}{9} \end{array}\right..$$

Bài tập 10.

a. Ta có:

$$A = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}...\frac{18}{19}.\frac{19}{20} = \frac{1}{20}.$$

Xét hiệu:

$$\frac{1}{20} - \frac{1}{21} = \frac{21-20}{20.21} > 0$$

Vậy $A > \frac{1}{21}$.

b. Ta có:

$$B = \frac{3}{4}.\frac{8}{9}.\frac{15}{16}.\frac{24}{25}...\frac{80}{81}.\frac{99}{100} = \frac{3}{2^2}.\frac{2.4}{3^2}.\frac{3.5}{4^2}.\frac{4.6}{5^2}...\frac{8.10}{9^2}.\frac{9.11}{10^2}$$

$$= \frac{2.3^2.4^2.5^2...9^2.10.11}{2^2.3^2.4^2.5^2...9^2.10^2} = \frac{11}{20}.$$

Xét hiệu:

$$\frac{11}{20} - \frac{11}{21} = \frac{11.(21-20)}{20.21} > 0.$$

Vậy $B > \frac{11}{21}$.

CHỦ ĐỀ 4 GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA SỐ THẬP PHÂN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

Giá trị tuyệt đối của một số hữu tỉ x (kí hiệu / x/) là khoảng cách từ điểm x tới điểm 0 trên trục số, được xác định như sau:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \ge 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}.$$

Nhận xét:

1. Với mọi $x \in \mathbf{Q}$ ta luôn có:

$$|x| \ge 0 \text{ và } |x| \ge x.$$

2. Trong hai số hữu tỉ âm, số hữu tỉ nào có giá trị tuyệt đối lớn hơn thì nhỏ hơn.

Thí dụ 1:

a. Ta có:

$$\left|\frac{2}{9}\right| = \frac{2}{9} \text{ (vì } \frac{2}{9} > 0),$$

b. Ta có:

$$|-1,75| = -(-1,75) = 1,75 \text{ vì } (-1,75 < 0).$$

c. Ta có:

$$|2 - |-8|| = |2 - 8| = |-6| = 6.$$

Nhận xét:

1. Ta có:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

2. Việc sử dụng tính chất dấu giá trị tuyệt đối, cho phép chúng ta bước đầu làm quen với việc giải phương trình chứa dấu trị tuyệt đối.

Thí dụ 2: Tìm x, biết:

a. $|x - 1| - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$.

b. $|x| + \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$.

Giải

a. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$|x - 1| = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3.2 + 1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = \frac{7}{8} \\ x - 1 = -\frac{7}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{7}{8} + 1 = 1\frac{7}{8} \\ x = -\frac{7}{8} + 1 = \frac{1}{8} \end{array}\right.$$

Vậy, ta tìm được hai giá trị của x là $x = 1\frac{7}{8}$ hoặc $x = \frac{1}{8}$.

b. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$|x| = \frac{5}{6} - \frac{5}{2} = \frac{5 - 3.5}{6} = \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3} < 0$$

Do đó, không có giá trị nào của x.

2. CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA SỐ THẬP PHÂN

Khi cộng, trừ, nhân, chia các số thập phân, ta có thể viết chúng dưới dạng phân số thập phân rồi làm theo quy tắc các phép tính đã biết về phân số.

Trong khi thực hiện các phép tính cộng, trừ, nhân, chia các số thập phân ta thường áp dụng các quy tắc về giá trị tuyệt đối và về dấu tương tự như số nguyên.

Thí dụ 3: Ta có:

$$0,25 + 0,3 = \frac{1}{4} + \frac{3}{10} = \frac{17}{20} = 0,55.$$

$$-1,2 - 0,5 = -\frac{6}{5} - \frac{1}{2} = -\frac{17}{10} = -1,7.$$

$$0,4.(-1,5) = \frac{2}{5}.\frac{-3}{2} = \frac{-3}{5} = -0,6.$$

$$2,5 : 0,5 = \frac{5}{2} : \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.2 = 5.$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tính nhanh:

a. $A = 5,6 + (-7,3) - 15,6 + (-65,7)$.

b. $B = 3,5.(-31,7) + 45,9.\ 0,6 + 3,5.\ 21,7 - 0,6.(-54,1)$.

Giải

a. Ta có:

$A = 5,6 + (-7,3) - 15,6 + (-65,7) = (5,6 - 15,6) - (7,3 + 65,7)$

$= -10 - 72 = -82$.

b. Ta có:

$B = 3,5.(-31,7) + 45,9.\ 0,6 + 3,5.\ 21,7 - 0,6.(-54,1)$

$= 3,5.(-31,7) + 45,9.\ 0,6 + 3,5.\ 21,7 + 0,6.54,1$

$= 3,5(-31,7 + 21,7) + 0,6(45,9 + 54,1) = 3,5.(-10) + 0,6.100$

$= 35 + 60 = 95$.

Ví dụ 2: Tìm x, biết:

a. $|1,8 - x| = 0,5$.

b. $\left|x + \frac{2}{7}\right| = 1$.

c. $\left|\frac{1}{4} - x\right| + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$.

Giải

a. Ta có:

$$|1,8 - x| = 0,5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1,8 - x = 0,5 \\ 1,8 - x = -0,5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1,3 \\ x = 2,3 \end{array}\right..$$

Vậy, x = 1,3 hoặc x = 2,3.

b. Ta có:

$$\left|x + \frac{2}{7}\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{2}{7} = 1 \\ x + \frac{2}{7} = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5}{7} \\ x = \frac{-9}{7} \end{array}\right..$$

Vậy, $x = \frac{5}{7}$ hoặc $x = \frac{-9}{7}$.

c. Ta có:

$$\left|\frac{1}{4} - x\right| + \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{4} - x\right| = \frac{-1}{6}.$$

Vì $\left|\frac{1}{4} - x\right| \geq 0$ với mọi $x \in \mathbf{Q}$ nên không tìm được số hữu tỉ x nào thỏa mãn.

Ví dụ 3: Tìm x, y, z biết:

a. $\left|\frac{1}{2} + x\right| + |x + y + z| + \left|\frac{1}{3} + y\right| = 0.$

b. $\left|\frac{1}{12} - x\right| + \left|\frac{1}{25} - y\right| + \left|z - \frac{14}{3}\right| \leq 0.$

Giải

a. Ta có:

$$\begin{cases} \left|\frac{1}{2} + x\right| \geq 0 \\ |x + y + z| \geq 0 \\ \left|\frac{1}{3} + y\right| \geq 0 \end{cases}.$$

Do đó:

$$\left|\frac{1}{2} + x\right| + |x + y + z| + \left|\frac{1}{3} + y\right| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{1}{2} + x\right| = 0 \\ |x + y + z| = 0 \\ \left|\frac{1}{3} + y\right| = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} + x = 0 \\ x + y + z = 0 \\ \frac{1}{3} + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = -y - z \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{5}{6} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Vậy, $x = \frac{-1}{2}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = \frac{5}{6}$.

b. Ta có:

$$\begin{cases} \left|\frac{1}{12} - x\right| \geq 0 \\ \left|\frac{1}{25} - y\right| \geq 0 \\ \left|z - \frac{14}{3}\right| \geq 0 \end{cases}.$$

Do đó,

$$\left|\frac{1}{12} - x\right| + \left|\frac{1}{25} - y\right| + \left|z - \frac{14}{3}\right| \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{1}{12} - x\right| = 0 \\ \left|\frac{1}{25} - y\right| = 0 \\ \left|z - \frac{14}{3}\right| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{12} - x = 0 \\ \frac{1}{25} - y = 0 \\ z - \frac{14}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{12} \\ y = \frac{1}{25} \\ z = \frac{14}{3} \end{cases}.$$

Vậy, $x = \frac{1}{12}$, $y = \frac{1}{25}$, $z = \frac{14}{3}$.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng với mọi x, y ∈ **Q** ta luôn có:

a. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

b. $|x - y| \geq |x| - |y|$.

Giải

a. Ta biểu diễn hai số hữu tỉ x, y dưới dạng:

$$x = \frac{a}{b} \text{ và } y = \frac{c}{d} \text{ với } a, b, c, d \in \mathbb{Z};\ b, d \neq 0.$$

Ta có:

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right| = \left|\frac{ad + cb}{bd}\right| = \frac{|ad + cb|}{|bd|}.$$

Với a, b, c, d là những số nguyên ta luôn có:

$|ad + cb| \le |ad| + |cb|$.

Suy ra:

$$\frac{|ad + cb|}{|bd|} \le \frac{|ad| + |cb|}{|bd|} = \frac{|ad|}{|bd|} + \frac{|cb|}{|bd|} = \left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{c}{d}\right| = |x| + |y|.$$

Vậy, ta được:

$|x + y| \le |x| + |y|$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x.y \ge 0$.

b. Ta có:

$x = x - y + y$.

Suy ra:

$|x| = |(x - y) + y| \le |x - y| + |y| \Leftrightarrow |x - y| \ge |x| - |y|$.

Vậy, ta được $|x - y| \ge |x| - |y|$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x.y \ge 0$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu công thức xác định giá trị tuyệt đối của một số hữu tỉ

Câu hỏi 2: Phát biểu quy tắc cộng, trừ, nhân, chia số thập phân.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính nhanh:

a. $A = 3,7 + (-11,8) - 15,7 + (-35,2)$.

b. $B = 13,9.(-24,5) + 17,2.\ 0,3 + 13,9.\ 14,5 - 0,3.(-82,8)$.

Bài tập 2. Tìm $|x|$, biết:

a. $x = \frac{5}{12}$.

b. $x = \frac{-3}{2}$.

c. $x = \frac{-15}{-18}$.

d. $x = 0$.

Bài tập 3. Tìm x, biết:

a. $|x| = \frac{5}{7}$.

b. $|x| = \frac{-13}{-17}$.

e. $\left|x - \frac{1}{5}\right| = \frac{2}{15}$.

f. $\left|x + \frac{9}{8}\right| = 1$.

c. $|x| = \frac{-3}{4}$.

d. $|0{,}9 - x| = 1{,}7$.

g. $2\left|\frac{2}{3} - x\right| + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Bài tập 4. Tìm x, y, z biết:

a. $\left|\frac{1}{4} - x\right| + |x - y + z| + \left|\frac{2}{3} + y\right| = 0$

b. $\left|\frac{15}{32} - x\right| + \left|\frac{4}{25} - y\right| + \left|z - \frac{14}{31}\right| < 0$

Bài tập 5. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a. $A = |x - 5| - |x - 7|$.

b. $B = |125 - x| + |x - 65|$.

Hướng dẫn: Áp dụng các tính chất trong ví dụ 4.

V.HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Ta được:

a. $A = 35$.

b. $B = 169$.

Bài tập 2. Ta được:

a. $|x| = \left|\frac{5}{12}\right| = \frac{5}{12}$.

b. $|x| = \frac{3}{2}$.

c. $|x| = \frac{15}{18}$.

d. $|x| = 0$.

Bài tập 3.

a. $x = \pm\frac{5}{7}$.

b. $x = \pm\frac{13}{17}$.

c. Không tồn tại vì $|x| \geq 0$.

d. $x = -0{,}8$ hoặc $x = 2{,}6$.

e. Ta có:

$$\left|x - \frac{1}{5}\right| = \frac{2}{15} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{15} + \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ hoặc } x = -\frac{1}{15}.$$

f. $x = \frac{1}{8}$ hoặc $x = \frac{-17}{8}$.

g. $x = \frac{11}{12}$ hoặc $x = \frac{5}{12}$.

Bài tập 4. Ta được:

a. $x = \frac{1}{4}$; $y = \frac{-2}{3}$; $z = \frac{-11}{12}$.

b. Không có x, y, z nào thỏa mãn.

Bài tập 5. (*Áp dụng ví dụ 4*)

a. Áp dụng $|x - y| \geq |x| - |y|$, ta có:

$$|x - 5| - |x - 7| \leq |(x - 5) - (x - 7)| = |x - 5 - x + 7| = 12.$$

Vậy, $A_{\text{lớn nhất}} = 12$ đạt được khi:

$$(x - 5).(x - 7) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 7 \text{ hoặc } x \leq 5.$$

b. Áp dụng $|x + y| \leq |x| + |y|$, ta có:

$$|125 - x| + |x - 65| \geq |125 - x + x - 65| = 60.$$

Vậy, $A_{\text{nhỏ nhất}} = 60$ đạt được khi:

$$(125 - x).(x - 65) \geq 0 \Leftrightarrow 65 \leq x \leq 125.$$

CHỦ ĐỀ 5 LUỸ THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

Lũy thừa bậc n của một số hữu tỉ x, kí hiệu x^n, là tích của n thừa số x (n là một số tự nhiên lớn hơn 1).

$$x^n = \underbrace{x.x.x...x}_{\text{n thừa số}} \quad (x \in \mathbf{Q}, n \in \mathbf{N}, n > 1)$$

đọc là x mũ n hoặc x lũy thừa n hoặc lũy thừa bậc n của x; x gọi là cơ số, n gọi là số mũ.

Quy ước: Ta quy ước:

$$x^1 = 0.$$

$$x^0 = 1 \text{ (với } x \neq 0).$$

Khi viết số hữu tỉ x dưới dạng:

$$x = \frac{a}{b} \text{ (với } a, b \in \mathbf{N}, b \neq 0)$$

ta có:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}.\frac{a}{b}...\frac{a}{b}}_{\text{n thừa số}} = \frac{\overbrace{a.a...a}^{\text{n thừa số}}}{\underbrace{b.b...a}_{\text{n thừa số}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Vậy, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Thí dụ 1:

a. Ta có:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1.1}{2.2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

b. Ta có:

$$\left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{3^3} = \frac{-8}{27}.$$

2. TÍCH VÀ THƯƠNG CỦA HAI LUỸ THỪA CÙNG CƠ SỐ

Trước tiên chúng ta cũng nhau đánh giá thông qua thí dụ:

Thí dụ 2:

a. Ta có:

$2^2 . 2^3 = 4.8 = 32,$

$2^{2+3} = 2^5 = 32.$

Nhận xét thấy:

$2^2 . 2^3 = 2^{2+3} = 2^5.$

b. Ta có:

$$5^6 : 5^4 = \frac{5.5.5.5.5.5}{5.5.5.5} = 5 . 5 = 25,$$

$5^{6-4} = 5^2 = 25.$

Nhận xét thấy:

$5^6 : 5^4 = 5^{6-4} = 5^2.$

Từ đó, ta có:

Với mọi $x \in \mathbf{Q}$; $m, n \in \mathbf{N}$, $m \geq n$

- *Khi nhân hai lũy thừa cùng cơ số, ta giữ nguyên cơ số và cộng hai số mũ.*

$$x^m . x^n = x^{m+n}.$$

- *Khi chia hai lũy thừa cùng cơ số, ta giữ nguyên cơ số và lấy số mũ của số bị chia trừ đi số mũ của số chia.*

$$x^m : x^n = x^{m-n} \text{ (với } x \neq 0)$$

3. LUỸ THỪA CỦA LUỸ THỪA

Trước tiên chúng ta cũng nhau đánh giá thông qua thí dụ:

Thí dụ 3: Ta có:

$(3^2)^3 = (9)^3 = 729$ hoặc $3^{2.3} = 3^6 = 729.$

Nhận xét thấy:

$(3^2)^3 = 3^{2.3} = 3^6.$

Từ đó, ta có:

Với mọi $x \in Q$; $m, n \in N$. Khi tính lũy thừa của một lũy thừa, ta giữ nguyên cơ số và nhân hai số mũ.

$$(x^m)^n = x^{m.n}.$$

4. LUỸ THỪA CỦA MỘT TÍCH

Trước tiên chúng ta cũng nhau đánh giá thông qua thí dụ:

Thí dụ 4: Ta có:

$(2.5)^2 = 10^2 = 100.$

$2^2.5^2 = 4.25 = 100.$

Nhận xét thấy:

$(2.5)^2 = 2^2.5^2.$

Từ đó, ta có định nghĩa:

> *Với mọi x, y $\in$ **Q**; n $\in$ **N**. Lũy thừa của một tích thì bằng tích các lũy thừa*
>
> $$(x.y)^n = x^n.\ y^n.$$

5. LUỸ THỪA CỦA MỘT THƯƠNG

Trước tiên chúng ta cũng nhau đánh giá thông qua thí dụ:

Thí dụ 5: Ta có:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = (0,4)^2 = 0,16.$$

$$\frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25} = 0,16.$$

Nhận xét thấy:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2}.$$

Từ đó, ta có:

> *Với mọi x, y $\in$ **Q**, y $\neq 0$; n $\in$ **N**. Lũy thừa của một thương thì bằng thương các lũy thừa*
>
> $$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}.$$

6. LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ NGUYÊN ÂM

Ta có:

> *Với mọi x $\in$ **Q**, x $\neq 0$; n $\in$ **N***. Ta có:*
>
> $$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Thí dụ 6: Ta có:

$$7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49},$$

$$1mm = \frac{1}{1000}m = 10^{-3}m.$$

Nhận xét:

- Cho $m > n > 0$. Có thể xảy ra 3 trường hợp sau:
  1. Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n$.
  2. Nếu $a = 1$ thì $a^m = a^n$.
  3. Nếu $a < 1$ thì $a^m < a^n$.
- Lũy thừa bậc chẵn của hai số đối nhau thì bằng nhau.

$$(-x)^{2n} = x^{2n}.$$

- Lũy thừa bậc lẻ của hai số đối nhau thì đối nhau.

$$(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}.$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = 2^2 - (-3^2)^3 + 4^{-2}.16 - 2.5^2.$

b. $B = \left(2^3 : \frac{1}{2}\right).\frac{1}{8} + 3^{-2}.9 - 7.\left(\frac{14}{25}\right)^0 + 5.$

Giải

a. Ta có:

$$A = 2^2 - (-3^2)^3 + 4^{-2}.16 - 2.5^2 = 4 - (-9)^3 + \frac{1}{4^2}.16 - 2.25$$

$$= 4 + 729 + 1 - 50 = 684.$$

b. Ta có:

$$B = \left(2^3 : \frac{1}{2}\right).\frac{1}{8} + 3^{-2}.9 - 7.\left(\frac{14}{25}\right)^0 + 5$$

$$= 2^3.2.\frac{1}{8} + \frac{1}{9}.9 - 7.1 + 5 = 2 + 1 - 7 + 5 = 1.$$

Ví dụ 2: Tìm tất cả các số nguyên n thỏa mãn các đẳng thức sau:

a. $3^{-2}.9^n = 3^n$.

b. $\left(\frac{9}{25}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^{-4}$.

c. $a^{(n+5)(n-8)} = 1$.

d. $\frac{1}{2}.2^n = 2^1.3^2.4^2 - 4.2^n$.

Giải

a. Ta có:

$3^{-2}.9^n = 3^n \Leftrightarrow 3^{-2}.3^{2n} = 3^n \Leftrightarrow 3^{-2+2n} = 3^n \Leftrightarrow 2n - 2 = n \Leftrightarrow n =$
2.

Vậy, đẳng thức đúng khi n = 2.

b. Ta có:

$$\left(\frac{9}{25}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^{-4} \Leftrightarrow \left[\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]^n = \left(\frac{3}{5}\right)^{-4} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{2n} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-4}$$

$\Leftrightarrow 2n = -4 \Leftrightarrow n = -2.$

Vậy, đẳng thức đúng khi n = - 2.

c. Ta có:

$$a^{(n+5)(n-8)} = 1 \Leftrightarrow (n+5)(n-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n+5=0 \\ n-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=-5 \\ n=3 \end{array}\right..$$

Vậy, đẳng thức đúng khi n = - 5 hoặc n = 3.

d. Ta có:

$$\frac{1}{2}.2^n = 2^1.3^2.4^2 - 4.2^n \Leftrightarrow 2^{-1}.2^n - 4.2^n = 3^2.2.(2^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 2^{n-1} + 4.2^n = 9.2^5 \Leftrightarrow 2^{n-1}(1 + 4.2) = 9.2^5$$

$$\Leftrightarrow 2^{n-1}.9 = 9.2^5 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^5 \Leftrightarrow n - 1 = 5 \Leftrightarrow n = 6.$$

Vậy, đẳng thức đúng khi n = 6.

Ví dụ 3: Tìm x biết:

a. $(2x - 2)^2 = 16$.

b. $3^{x+2} - 3^x = 162$.

c. $(1 - x)^3 = 96$.

d. $5^{2x+1} - 2.5^x = 375$.

Giải

a. Ta có:

$$(2x-2)^2 = 16 \Leftrightarrow (2x-2)^2 = (\pm 4)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-2=4 \\ 2x-2=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right..$$

Vậy có hai số cần tìm là $x = 3$ và $x = -1$.

b. Ta có:

$$3^{x+1} - 3^x = 162 \Leftrightarrow 3^x(3 - 1) = 162 \Leftrightarrow 3^x = 81$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy, số cần tìm là $x = 4$.

c. Ta có:

$$(1 - x)^3 = 96 \Leftrightarrow (1 - x)^3 = 6^3 \Leftrightarrow 1 - x = 6 \Leftrightarrow x = -5.$$

Vậy, số cần tìm là $x = -5$.

d. Ta có:

$$5^{2x+1} - 2.5^x = 375 \Leftrightarrow 5^x(5 - 2) = 375$$

$$\Leftrightarrow 5^x = 125 \Leftrightarrow 5^x = 5^3 \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy, số cần tìm là $x = 3$.

Ví dụ 4: Tìm các số tự nhiên n, biết:

a. $4 < 2^n \leq 2.16$.

b. $9.27 \leq 3^n \leq 243$.

Giải

a. Ta có:

$4 = 2^2$,

$2.16 = 2.2^4 = 2^{1+4} = 2^5$,

do đó:

$$4 < 2^n \leq 2.16 \Leftrightarrow 2^2 < 2^n \leq 2^5 \Leftrightarrow 2 < n \leq 5.$$

Từ đó, ta có các số tự nhiên n là $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$.

b. Ta có:

$9.27 = 3^2.3^3 = 3^{2+3} = 3^5$,

$243 = 3^5$,

do đó:

$$9.27 \leq 3^n \leq 243 \Leftrightarrow 3^5 \leq 3^n \leq 3^5 \Leftrightarrow 5 \leq n \leq 5.$$

Từ đó, ta có số tự nhiên $n = 5$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa luỹ thừa với số mũ tự nhiên.

Câu hỏi 2: Phát biểu công thức tính tích, thương của hai luỹ thừa cùng cơ số.

Câu hỏi 3: Phát biểu công thức tính luỹ thừa của luỹ thừa.

Câu hỏi 4: Phát biểu công thức tính luỹ thừa của một tích.

Câu hỏi 5: Phát biểu công thức tính luỹ thừa của một thương.

Câu hỏi 6: Phát biểu công thức tính luỹ thừa với số mũ nguyên âm.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính giá trị của biểu thức:

a. $A = 2^{-3} + (5^2)^3 . 5^{-3} + 4^{-3} . 16 - 2.3^2 - 105.\left(\frac{24}{51}\right)^0$.

b. $B = \left(2^{-3} : \frac{1}{2^{-2}}\right).\frac{2}{3} + 4^{-2} . 8 - 7.\left(\frac{17}{23}\right)^0 + 19$.

Bài tập 2. Tìm tất cả các số nguyên n thỏa mãn các đẳng thức sau:

a. $5^{-3} . 25^n = 5^{3n}$.

b. $\left(\frac{8}{27}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{-12}$.

c. $a^{(2n+6)(3n-9)} = 1$.

d. $\frac{1}{3} .3^n = 7 . 3^2 . 9^2 - 2 . 3^n$.

Bài tập 3. Tìm x biết:

a. $(x - 5)^2 = 25$.

b. $9^{x+1} - 5.3^{2x} = 324$.

c. $(1 - x)^5 = 32$.

d. $3.5^{2x+1} - 3 . 25^x = 300$.

Bài tập 4. Tính giá trị của biểu thức sau:

a. $A = \frac{25^3.5^5}{6.5^{10}}$.

b. $B = \frac{2^5 6^3}{8^2.9^2}$.

c. $C = \frac{15^3 + 5.15^2 - 5^3}{18^3 + 6.18^2 - 6^3}$.

d. $D = \frac{\left(7^4 - 7^3\right)^2}{49^3}$.

Bài tập 5. Tìm x biết:

a. $16^x : 4^x = 16$.

b. $2^{-1} .2^x + 4.2^x = 72$.

c. $(2x + 1)^3 = - 64$.

d. $(3x - 2)^2 = 81$.

Bài tập 6. Tìm các số tự nhiên n, biết:

a. $8 < 2^n \le 2.32$.

b. $3.27 \le 3^n \le 243$.

d. $\frac{1}{4} \le 2^n \le 4$.

c. $8.27 \le 6^n \le 36.4.9$.

e. $9.27 \le \frac{1}{3^n} \le 27.243$.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Ta được:

a. $A = -47\frac{5}{8}$.

b. $B = \frac{77}{6}$.

Bài tập 2. Ta được:

a. n = - 3.

b. n = - 4.

c. n = - 3 hoặc n = 3.

d. Ta có:

$$\frac{1}{3}.3^n = 7.\ 3^2.\ 9^2 - 2.\ 3^n \Leftrightarrow 3^{-1}.3^n + 2.\ 3^n = 3^2.\ (3^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 3^{n-1}(1 + 2.\ 3) = 7.\ 3^2.\ 3^4 \Leftrightarrow 3^{n-1}.\ 7 = 7.\ 3^6$$

$$\Leftrightarrow 3^{n-1} = 3^6 \Leftrightarrow n = 7.$$

Bài tập 3. Ta được:

a. x = 0 hoặc x = 10.

b. x = 2.

c. x= - 1.

d. x = 1.

Bài tập 4.

a. Ta có:

$$A = \frac{25^3.5^5}{6.5^{10}} = \frac{5^{11}}{6.5^{10}} = \frac{5}{6}.$$

b. Ta có:

$$B = \frac{2^5 6^3}{8^2.9^2} = \frac{2^5(2.3)^3}{(2^3)^2.(3^2)^2} = \frac{2^8 3^3}{2^6.3^4} = \frac{4}{3}$$

c. Ta có:

$$C = \frac{15^3 + 5.15^2 - 5^3}{18^3 + 6.18^2 - 6^3} = \frac{(3.5)^3 + 5.(3.5)^2 - 5^3}{(6.3)^3 + 6.(3.6)^2 - 6^3}$$

$$= \frac{5^3(3^3 + 3^2 - 1)}{6^3(3^3 + 3^2 - 1)} = \frac{5^3}{6^3}.$$

d. Ta có:

$$D = \frac{(7^4 - 7^3)^2}{49^3} = \frac{7^4 - 7^3}{49^3}.(7^4 - 7^3)$$

$$= \left(\frac{7^4}{49^3} - \frac{7^3}{49^3}\right).(7^4 - 7^3) = \left(\frac{7^4}{7^6} - \frac{7^3}{7^6}\right).(7^4 - 7^3)$$

$$= \left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^3}\right).(7^4 - 7^3) = \frac{6}{7^3}.(7^4 - 7^3) = \frac{6}{7^3}.7^3(7 - 1) = 36.$$

Bài tập 5.

a. $x = 2$.

b. $x = 4$.

c. Ta có:

$$(2x + 1)^3 = (-4)^3 \Leftrightarrow 2x + 1 = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}.$$

d. Ta có:

$$(3x - 2)^2 = 9^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 2 = 9 \\ 3x - 2 = -9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{11}{3} \\ x = \frac{-7}{3} \end{array}\right.$$

Bài tập 6.

a. Ta có:

$$8 < 2^n \leq 2.32 \Leftrightarrow 2^3 < 2^n \leq 2.2^5 \Leftrightarrow 2^3 < 2^n \leq 2^6 \Leftrightarrow 3 < n \leq 6.$$

Vậy, ta nhận được các số 4, 5, 6.

b. Ta có:

$$3.27 \leq 3^n \leq 243 \Leftrightarrow 3.3^3 \leq 3^n \leq 3^5 \Leftrightarrow 3^4 \leq 3^n \leq 3^5 \Leftrightarrow 4 \leq n \leq 5$$

Vậy, ta nhận được các số 4, 5.

c. Ta có:

$$8.27 \leq 6^n \leq 36.4.9 \Leftrightarrow 2^3.3^3 \leq 6^n \leq 6^2.2^2.3^2 \Leftrightarrow 6^3 \leq 6^n \leq 6^2.6^2$$

$$\Leftrightarrow 6^3 \leq 6^n \leq 6^4 \Leftrightarrow 3 \leq n \leq 4.$$

Vậy, ta nhận được các số 3, 4.

d. Ta có:

$$\frac{1}{4} \le 2^n \le 4 \Leftrightarrow 2^{-2} \le 2^n \le 2^2 \Leftrightarrow -2 \le n \le 2.$$

Vậy, ta nhận được các số $-2, -1, 0, 1, 2$.

e. Ta có:

$$9.27 \le \frac{1}{3^n} \le 27.243 \Leftrightarrow 3^2.3^3 \le 3^{-n} \le 3^3.3^5 \Leftrightarrow 3^5 \le 3^{-n} \le 3^8$$

$$\Leftrightarrow 5 \le -n \le 8 \Leftrightarrow -8 \le n \le -5.$$

Vậy, ta nhận được các số $-8, -7, -6, -5$.

CHỦ ĐỀ 6

TỈ LỆ THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Chúng ta sẽ bắt đầu với thí dụ sau:

Thí dụ 1: So sánh hai tỉ số:

$$\frac{18}{27} \text{ và } \frac{2,4}{3,6}.$$

Giải

Ta có:

$$\frac{18}{27} = \frac{2.9}{3.9} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{2,4}{3,6} = \frac{24}{36} = \frac{2.12}{3.12} = \frac{2}{3}.$$

Do đó:

$$\frac{18}{27} = \frac{2,4}{3,6}.$$

Vậy, ta nói đẳng thức $\frac{18}{27} = \frac{2,4}{3,6}$ là một *tỉ lệ thức*.

Từ đó ta có định nghĩa:

> ***Tỉ lệ thức** là đẳng thức của hai tỉ số.*
>
> $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \textit{ hoặc } a : b = c : d$$

Chú ý: 1. Trong tỉ lệ thức a : b = c : d thì:

- Các số a, b, c, d là các *số hạng* của tỉ lệ thức.
- Các số a và d là các *ngoại tỉ*.
- Các số b và c là các *trung tỉ*.

2. Trong trường hợp b = 100, ta có tỉ lệ phần trăm:

$$\frac{a}{100} = a\%.$$

2. TÍNH CHẤT

Ta có một số tính chất cơ bản của tỉ lệ thức:

Với $a, b, c, d \neq 0$, ta có:

Tính chất 1. *Nếu* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *thì* $ad = bc$.

Tính chất 2. *Nếu có* $ad = bc$ *thì*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ *(hoán vị các trung tỉ với nhau)*

$\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ *(hoán vị các ngoại tỉ với nhau)*

$\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ *(hoán vị các trung tỉ với nhau)*

Thí dụ 2:

a. Ta có $\frac{5}{7} = \frac{15}{21}$ bởi vì:

$$5.21 = 15.7 = 105.$$

b. Với giả thiết đúng $3.14 = 7.6 = 42$ ta suy ra được:

$$\frac{3}{7} = \frac{6}{14}, \quad \frac{3}{6} = \frac{7}{14}, \quad \frac{14}{7} = \frac{6}{3}, \quad \frac{14}{6} = \frac{7}{3}.$$

3. TÍNH CHẤT CỦA DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

Chúng ta sẽ bắt đầu với thí dụ sau:

Thí dụ 3: Ta biết rằng:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

khi đó, nhận thấy rằng:

$$\frac{1+3}{2+6} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}.$$

$$\frac{1-3}{2-6} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}.$$

Từ đó, chúng ta có thể tổng quát để được tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, như sau:

Ta luôn có:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}.$$

Chú ý: Tính chất trên còn được mở rộng cho dãy nhiều tỉ số bằng nhau, cụ thể:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a \pm c \pm e}{b \pm d \pm f} = \frac{ma \pm mc \pm me}{mb \pm md \pm mf}.$$

Kết quả này thực sự có hiệu quả khi biến đổi phân thức cũng như chứng minh các hệ thức có chứa dãy tỉ số bằng nhau.

Thí dụ 4:

a. Từ dãy tỉ số $\frac{4}{9} = \frac{12}{27}$, ta nhận được:

$$\frac{4}{9} = \frac{4+12}{9+27} = \frac{16}{36},$$

$$\frac{4}{9} = \frac{4-12}{9-27} = \frac{8}{18}.$$

b. Từ dãy tỉ số $\frac{1}{3} = \frac{6}{18} = \frac{0,15}{0,45}$, ta nhận được:

$$\frac{1}{3} = \frac{1+2.6-100.0,15}{3+2.18-100.0,45} = \frac{-2}{-6}.$$

Chú ý:

1. Nếu có dãy $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$, ta nói:
   - Các số a, b, c tỉ lệ với các số x, y, z.
   - Hoặc a : b : c = x : y: z.
2. Và cũng từ đây, nảy sinh ra dạng toán " *Tìm các số x, y, ... biết tỉ số giữa chúng cũng một biểu thức tổng S* ", phương pháp giải dạng toán này được minh hoạ trong thí dụ sau:

Thí dụ 5: Cho ΔABC có chu vi bằng 22cn và các cạnh a, b, c của tam giác tỉ lệ với các số 2, 4, 5. Tính độ dài các cạnh của tam giác.

Giải

Từ giả thiết ta có:

$$a + b + c = 22cm,$$

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{2+4+5} = \frac{22}{11} = 2.$$

Từ đó, suy ra:

$$a = 2.2 = 4,$$

$$b = 4.2 = 8,$$

$$c = 5.2 = 10.$$

Vậy, ta được số đo các cạnh của tam giác là a = 4cm, b = 8cm, c = 10cm.

Nhận xét: - Như vậy, với dạng toán:

" *Tìm các số x, y, z, ... thoả mãn:*

$$\frac{x}{a_1} = \frac{y}{a_2} = \frac{z}{a_3} = \ldots \text{ và } k_1x + k_2y + k_3z + \ldots = S\text{"}$$

chúng ta thực hiện như sau:

Từ dãy tỉ số:

$$\frac{x}{a_1} = \frac{y}{a_2} = \frac{z}{a_3} = \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{k_1x}{k_1a_1} = \frac{k_2y}{k_2a_2} = \frac{k_3z}{k_3a_3} = \ldots = \frac{k_1x + k_2y + k_3z + \ldots}{k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 + \ldots}$$

$$= \frac{S}{k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 + \ldots}$$

Từ đó, ta nhận được các giá trị của x, y, z,...

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tìm x trong các tỉ lệ thức sau:

a. $\frac{x}{8,1} = \frac{-9}{2,7}$. b. $\frac{2\frac{1}{4}}{3} = \frac{x}{3,6}$.

Giải

a. Ta có:

$$\frac{x}{8,1} = \frac{-9}{2,7} \Leftrightarrow \frac{x}{81} = \frac{-9}{27}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot 27 = -9.81 \Leftrightarrow x = \frac{-9.81}{27} = -27.$$

Vậy, ta được x = - 27.

b. Ta có:

$$\frac{2\frac{1}{4}}{3} = \frac{x}{3,6} \Leftrightarrow \frac{\frac{9}{4}}{3} = \frac{x.10}{36} \Leftrightarrow \frac{9}{12} = \frac{x.10}{36}$$

$$\Leftrightarrow 10x \cdot 12 = 9.36 \Leftrightarrow x = \frac{9.36}{10.12} \Leftrightarrow x = 2\frac{7}{10}.$$

Vậy, ta được $x = 2\frac{7}{10}$.

Ví dụ 2: Tìm hai số x, y, biết rằng:

a. $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$ và 2x - y = 3.

b. $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$ và xy = 10.

Giải

a. Từ dãy tỉ số:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{5} \Rightarrow \frac{2x}{4} = \frac{-y}{-5} = \frac{2x-y}{4-5} = \frac{3}{-1} = -3$$

Từ đó, suy ra:

x = 2.(- 3) = - 6,

y = 5(- 3) = - 15,

Vậy, ta được nghiệm x = - 6, y = - 15.

b. Đặt dãy tỉ số:

$$k = \frac{x}{2} = \frac{y}{5} \Rightarrow x = 2k \text{ và } y = 5k.$$

Khi đó, với giả thiết:

$$xy = 10 \Leftrightarrow 2k.5k = 10 \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1.$$

- Với k = 1, ta nhận được các nghiệm x = 2, y = 5.
- Với k = - 1, ta nhận được các nghiệm x = - 2, y = - 5.

Vậy, bài toán có hai bộ nghiệm là x = 2, y = 5 hoặc x = - 2, y = - 5.

Ví dụ 3: Tìm ba số x, y, z, biết rằng:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \text{ và } x + 2y - 3z = -20.$$

Giải

Từ dãy tỉ số:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{2y}{2.3} = \frac{-3z}{-3.4} = \frac{x + 2y - 3x}{2 + 2.3 - 3.4} = \frac{-20}{-4} = 5$$

Từ đó, suy ra:

$x = 2.5 = 10,$

$y = 3.5 = 15,$

$z = 4.5 = 20.$

Vậy, ta được nghiệm x = 10, y = 15, z = 20.

Chú ý: Để tăng độ khó cho bài toán, người ta có thể bắt đầu với một trong hai hướng sau:

Hướng 1: Chuyển đổi biểu thức tổng về dạng bậc cao.

Cụ thể, ta thay x + 2y — 3z = - 20 bằng:

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 = -650.$$

Khi đó, ta cần thực hiện phép chuyển đổi:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16}.$$

Lưu ý: Trong trường hợp này bài toán sẽ có hai bộ nghiệm.

Hướng 2: Chuyển đổi dãy tỉ số thành các dãy tỉ số nhỏ.

Cụ thể:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15},$$

$$\frac{x}{2} = \frac{z}{4} \Rightarrow x = \frac{z}{2}.$$

Khi đó, bài toán sẽ được phát biểu lại dưới dạng:

"*Tìm ba số x, y, z, biết rằng* $\frac{x}{10} = \frac{y}{15}$, $x = \frac{z}{2}$ *và* $x + 2y - 3z = -20$"

Và, để giải bài toán này chúng ta cần sử dụng hai tỉ lệ thức đầu tiên để suy ra được dãy tỉ số $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ rồi tiếp tục thực hiện như trong ví dụ trên.

Ví dụ 4: Tìm ba số x, y, z, biết rằng:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3}, \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \text{ và } x - y + z = -49.$$

Giải

Từ các dãy tỉ số:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15},$$

$$\frac{y}{5} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{y}{15} = \frac{z}{12},$$

Từ đó, ta nhận được dãy tỉ số:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{-y}{-15} = \frac{z}{12} = \frac{x - y + z}{10 - 15 + 12} = \frac{-49}{7} = -7$$

Từ đó, suy ra:

$x = 10.(-7) = -70,$

$y = 15.(-7) = -105,$

$z = 12.(-7) = -84.$

Vậy, ta được nghiệm $x = 10, y = 15, z = 20.$

Ví dụ 5: Bốn lớp 7A, 7B, 7C, 7D nhận chăm sóc một mảnh vườn có diện tích $450m^2$. Trong đó, lớp 7A nhận chăm sóc 20% diện tích, lớp 7B nhận chăm sóc $\frac{1}{3}$ diện tích còn lại. Sau khi hai lớp trên nhận, phần vườn còn lại được chia cho hai lớp 7C và 7D với tỉ lệ $\frac{2}{3}$. Tính diện tích vườn giao cho mỗi lớp.

Giải

Diện tích vườn lớp 7A nhận là:

$$450.\frac{20}{100} = 90 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Diện tích vườn còn lại sau khi lớp 7A nhận là:

$$450 - 90 = 360 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Diện tích vườn lớp 7B nhận là:

$$360.\frac{1}{3} = 120 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Diện tích vườn còn lại sau khi lớp 7A và 7B nhân là:

$$450 - (90 + 120) = 240 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Diện tích còn lại chia cho hai lớp 7C và 7D theo tỉ lệ $\frac{2}{3}$.

Gọi diện tích vườn chia cho lớp 7C là a.

$\Rightarrow$ Diện tích vườn chia cho lớp 7D là 240 — a. Ta có:

$$\frac{a}{240 - a} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3a = 2(240 - a)$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2.240}{5} \Leftrightarrow a = 96 \text{ (m}^2\text{)}.$$

$\Rightarrow$ Diện tích vườn chia cho lớp 7D là $240 - a = 240 - 96 = 144$ (m²).

Vậy, diện tích vườn chia cho lớp 7A là 90m², cho lớp 7B là 120 m², cho lớp 7C là 96 m², cho lớp 7D là 144m².

<u>Ví dụ 6:</u> Chứng minh rằng từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($a - b \neq 0$ và $c - d \neq 0$) ta có thể suy ra tỉ lệ thức $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$.

Giải

Theo tính chất 1, ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$$

Theo tính chất 2, ta có:

$$ad = bc \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Theo tính chất 3, ta có:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d} \Rightarrow (a+b)(c-d) = (c+d)(a-b)$$

$\Rightarrow \dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d}$, đpcm.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa tỉ lệ thức.

Câu hỏi 2: Nêu các tính chất cơ bản của tỉ lệ thức.

Câu hỏi 3: Nêu tính chất của dãy tỉ số bằng nhau.

Câu hỏi 4: Nêu các bước cần thực hiện để giải bài toán:

" Tìm các số x, y, z, ... thoả mãn

$$\frac{x}{a_1} = \frac{y}{a_2} = \frac{z}{a_3} = \ldots \text{ và } k_1x + k_2y + k_3z + \ldots = S \text{ "}.$$

Câu hỏi 5: Nêu các bước cần thực hiện để giải bài toán:

" Tìm các số x, y, z, ... thoả mãn:

$$\frac{x}{a_1} = \frac{y}{a_2} = \frac{z}{a_3} = \ldots \text{ và } k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2 + \ldots = S \text{ "}.$$

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tìm x trong các tỉ lệ thức sau:

a. $\dfrac{x}{52} = \dfrac{-14}{72}$.

b. $\dfrac{-x}{120} = \dfrac{7,2}{70}$.

c. $\dfrac{2\frac{2}{3}}{5} = \dfrac{x}{8,5}$.

d. $\dfrac{1\frac{2}{5}}{8} = \dfrac{x}{-9,5}$.

Bài tập 2. Tìm hai số x, y, biết rằng:

a. $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3}$ và $4x - 3y = -2$.

b. $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{5}$ và $xy = 20$.

Bài tập 3. Tìm ba số x, y, z, biết rằng:

a. $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4}$ và $x + y + z = 9$.

b. $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6}$ và $x + 2y - 3z = -14$.

Bài tập 4. Tìm các số a, b, c biết:

a. $a = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$ và $15a - 5b + 3c = 45$.

b. $\frac{a+1}{2} = \frac{b+2}{3} = \frac{c+2}{4}$ và $3a — 2b + c = 105$.

Bài tập 5. Tìm ba số x, y, z, biết rằng:

a. $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$, $\frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ và $x — 2y + 3z = 19$.

b. $\frac{x}{1} = \frac{y}{4}$, $\frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ và $4x + y - z = 16$.

Bài tập 6. Tìm ba số x, y, z, biết rằng:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \text{ và } x^2 — y^2 + 2z^2 = 108.$$

Bài tập 7. Tính số học sinh lớp 8A và lớp 9A, biết rằng lớp 9A nhiều hơn lớp 8A là 5 học sinh và tỉ số học sinh của hai lớp là 9 : 8.

Bài tập 8. Bốn lớp 7A, 7B, 7C, 7D nhận chăm sóc một mảnh vườn có diện tích $500m^2$. Trong đó, lớp 7A nhận chăm sóc 25% diện tích, lớp 7B nhận chăm sóc $\frac{1}{3}$ diện tích còn lại. Sau khi hai lớp trên nhận, phần vườn còn lại được chia cho hai lớp 7C, 7D và 7E với tỉ lệ $\frac{3}{2} : \frac{9}{5} : \frac{17}{10}$. Tính diện tích vườn giao cho mỗi lớp.

Bài tập 9. Chứng minh rằng từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $(c + d \neq 0$ và $c — d \neq 0)$ ta có thể suy ra tỉ lệ thức $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$.

Bài tập 10. Chứng minh rằng nếu:

$$(x + y + c — d)(a — b — c — d) = (a + b — c + d)(a — b + c + d)$$

thì $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c-d}{c+d}$.

Bài tập 11. Tìm một số có 3 chữ số. Biết số đó chia hết cho 4 và các chữ số của nó tỉ lệ với 1, 2, 5.

Bài tập 12. Cho ΔABC có số đo các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ lần lượt tỉ lệ với 1, 2, 3. Tính số đo các góc của ΔABC.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. (*Học sinh tự làm*).

Bài tập 2.

a. $x = 4, y = 6$.

b. $x = 4, y = 5$ hoặc $x = -4, y = -5$.

Bài tập 3.

a. $x = 2, y = 3, z = 4$.

b. $x = 6, y = 8, z = 12$.

Bài tập 4.

a. Ta có:

$$a = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} \Leftrightarrow b = 3a \text{ và } c = 5a.$$

Thay b và c vào $15a - 5b + 3c = 45$, ta được:

$$15a - 5.3a + 3.5a = 45 \Leftrightarrow 15a = 45 \Leftrightarrow a = 3.$$

Với $a = 3 \Rightarrow b = 9$ và $c = 15$.

Vậy, $a = 3, b = 9, c = 15$.

b. Ta có:

$$\frac{a+1}{2} = \frac{b+2}{3} = \frac{c+2}{4} \Leftrightarrow b = \frac{3(a+1)}{2} - 2 \text{ và } c = 2(a+1) - 2$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{3a-1}{2} \text{ và } c = 2a.$$

Thay b và c vào $3a - 2b + c = 105$, ta được:

$$3a - 2\frac{3a-1}{2} + 2a = 105 \Leftrightarrow 3a - (3a - 1) + 2a = 105 \Leftrightarrow a = 52.$$

Với $a = 52 \Rightarrow b = \frac{155}{2}$ và $c = 104$.

Vậy, $a = 52, b = \frac{155}{2}, c = 104$.

Bài tập 5.

a. $x = 4, y = 6, z = 9$.

b. $x = 3, y = 12, z = 16$.

Bài tập 6. $x = 4, y = 6, z = 8$ hoặc $x = -4, y = -6, z = -8$.

Bài tập 7. Lớp 8A có 40 học sinh và lớp 9A có 45 học sinh.

Bài tập 8.

Diện tích vườn lớp 7A nhận là:

$$500.\frac{25}{100} = 125\ (m^2).$$

Diện tích vườn còn lại sau khi lớp 7A nhận là:

$$500 - 125 = 375\ (m^2).$$

Diện tích vườn lớp 7B nhận là:

$$375.\frac{1}{3} = 125\ (m^2).$$

Diện tích vườn còn lại sau khi lớp 7A và 7B nhận là:

$$500 - (125 + 125) = 250\ (m^2).$$

Diện tích còn lại chia cho hai lớp 7C, 7D và 7E theo tỉ lệ $\frac{3}{2} : \frac{9}{5} : \frac{17}{10}$.

Gọi diện tích vườn chia cho lớp 7C, 7D, 7E là a, b, c. Ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\frac{3}{2}} = \dfrac{b}{\frac{9}{5}} = \dfrac{c}{\frac{17}{10}} \\ a + b + c = 250 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\frac{3}{2}} = \dfrac{b}{\frac{9}{5}} = \dfrac{c}{\frac{17}{10}} = \dfrac{a+b+c}{\frac{3}{2}+\frac{9}{5}+\frac{17}{10}} \\ a + b + c = 250 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\frac{3}{2}} = \dfrac{b}{\frac{9}{5}} = \dfrac{c}{\frac{17}{10}} = \dfrac{250}{\frac{3.5 + 9.2 + 17}{10}} = 50 \\ a + b + c = 250 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = 50.\frac{3}{2} = 75(m^2)\ ;\ b = 50.\frac{9}{5} = 90(m^2)\ ;\ c = 50.\frac{17}{10} = 85(m^2).$$

Vậy, diện tích vườn chia cho lớp 7A là $125m^2$, cho lớp 7B là $125\ m^2$, cho lớp 7C là $75\ m^2$, cho lớp 7D là $90m^2$, cho lớp 7E là $85\ m^2$.

Bài tập 9. Ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Vậy, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$ $(c + d \neq 0$ và $c - d \neq 0)$.

Bài tập 10. Ta có:

$$(a + b + c - d)(a - b - c - d) = (a + b - c + d)(a - b + c + d)$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c-d}{a+b-c+d} = \frac{a-b+c+d}{a-b-c-d}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)+(c-d)}{(a+b)-(c-d)} = \frac{(a-b)+(c+d)}{(a-b)-(c+d)}.$$

Đặt $A = a + b$; $B = c - d$; $C = a - b$; $D = c + d$. Ta được:

$$\frac{A+B}{A-B} = \frac{C+D}{C-D} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow \frac{a+b}{c-d} = \frac{a-b}{c+d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c-d}{c+d}.$$

Vậy:

$$(a + b + c - d)(a - b - c - d) = (a + b - c + d)(a - b + c + d)$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c-d}{c+d}.$$

Bài tập 11. Giả sử số cần tìm là $\overline{abc}$ với $1 \leq a \leq 9$ và $0 \leq b, c \leq 9$.

Do đó:

$$1 \leq (a + b + c) \leq 27.$$

Vì số cần tìm chia hết cho $6 = 3 \times 2$ nên $(a + b + c) \vdots 3$ và c là số chẵn.

Suy ra, $a + b + c$ có thể nhận các giá trị: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27.

Lại có:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{8} \Rightarrow a = \frac{a+b+c}{8}.$$

Vì a là một số nguyên nên $(a + b + c) \vdots 8$.

Vậy, $a + b + c$ chỉ có thể nhận giá trị: 24. Do đó:

c	0	2	4	6	8
a + b	24	22	20	18	16
a				9	7 ; 8 ; 9
b				9	9 ; 8 ; 7
$\overline{abc}$				996	798 ; 888 ; 978

Vậy, có 4 số cần tìm 996, 798, 888, 978.

Bài tập 12. Trong ΔABC, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0.$$

Từ giả thiết ta có:

$$\frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{3} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{3} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{1 + 2 + 3} = \frac{180}{6} = 30^0.$$

Từ đó, suy ra:

$\hat{A} = 30^0$,

$\hat{B} = 60^0$,

$\hat{C} = 90^0$.

Vậy, ta được số đo các góc của tam giác là $\hat{A} = 30^0$, $\hat{B} = 60^0$, $\hat{C} = 90^0$.

CHỦ ĐỀ 7

SỐ THẬP PHÂN HỮU HẠN
SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN
LÀM TRÒN SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. SỐ THẬP PHÂN HỮU HẠN - SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN

Thí dụ 1:

a. Ta có:

$$\frac{5}{20} = 0{,}4, \quad \frac{12}{5} = 2{,}4, \qquad (1)$$

b. Ta có:

$$\frac{20}{3} = 6,66666... = 6,(6)\ ; \quad \frac{11}{45} = 0,24444... = 0,2(4) \quad (2)$$

Nhận xét:

1. Các số thập phân như ở (1) được gọi là các số *thập phân hữu hạn.*
2. Các số thập phân như ở (2) được gọi là các số *thập phân vô hạn tuần hoàn.*
3. Ta nói:

   6,(6) là một số thập phân vô hạn tuần hoàn có *chu kì* là 6.

   0,2(4) là một số thập phân vô hạn tuần hoàn có *chu kì* là 4.
4. Mỗi số hữu tỉ đều biểu diễn được dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc số thập phân sô hạn tuần hoàn. Ngược lại mỗi số thập phân hữu hạn hoặc số thập phân sô hạn tuần hoàn đều biểu diễn được dưới dạng một số hữu tỉ.

Người ta chứng minh được:

1. *Nếu một phân số **tối giản** với mẫu dương mà mẫu không có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số đó được viết dưới dạng **số thập phân hữu hạn**.*
2. *Nếu một phân số **tối giản** với mẫu dương mà mẫu có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số đó được viết dưới dạng **số thập phân vô hạn tuần hoàn**.*

2. LÀM TRÒN SỐ

Ta có quy tắc làm tròn số như sau:

- *Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi nhỏ hơn 5 thì ta giữ nguyên bộ phận còn lại. Trong trường hợp số nguyên thì ta thay các chữ số bị bỏ đi bằng các chữ số 0.*
- *Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cộng thêm 1 vào chữ số cuối cùng của bộ phận còn lại. Trong trường hợp số nguyên thì ta thay các chữ số bị bỏ đi bằng các chữ số 0.*

Thí dụ 2: Ta có:

- Làm tròn số 51930 đến hàng nghìn (hay gọi là: tròn nghìn).

  Do 51930 gần với 52000 hơn là 51000 nên ta viết:

  $$51900 \approx 52000$$

(đọc là: 51930 *gần bằng* 52000 hay 51900 *xấp xỉ* 5200)

- Làm tròn số thập phân 238,3547 đến hàng chục, hàng trăm, số thập phân thứ hai, số thập phân thứ ba.

  Tròn đến hàng chục: $238,3547 \approx 240$

  Tròn đến hàng trăm: $238,3547 \approx 200$

  Tròn đến số thập phân thứ hai: $238,3547 \approx 238,4$

  Tròn đến số thập phân thứ ba: $238,3547 \approx 238,35$

Chú ý: Để làm tròn giá trị của một biểu thức ta thường làm tròn các số và các kết quả trung gian đến hàng kế tiếp sau hàng đó, đến kết quả cuối cùng mới làm tròn đến đúng hàng đó.

Thí dụ 3: Tính giá trị của phép tính:

$$8,673 : 5,829.$$

Giải

- Làm tròn đến hàng đơn vị, ta có:

  $$8,673 : 5,829 \approx 8,7 : 5,8 = 1,5 \approx 2.$$

- Làm tròn đến số thập phân thứ hai, ta có:

  $$8,673 : 5,829 \approx 8,67 : 5,83 = 1,487 \approx 1,5.$$

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân:

$$\frac{1}{9};\ \frac{12}{99};\ \frac{123}{999};\ \frac{1234}{9999}.$$

Giải

Ta có:

$$\frac{1}{9} = 0,1111... = 0,(1),$$

$$\frac{12}{99} = 0,121212... = 1,(12),$$

$$\frac{123}{999} = 0,123123... = 0,(123),$$

$$\frac{1234}{9999} = 0,12341234... = 0,(1234).$$

Tổng quát: Ta có:

$$0,(a) = \frac{a}{9},$$

$$0,(ab) = \frac{\overline{ab}}{99};$$

$$0,(abc) = \frac{\overline{abc}}{999},$$

$$0,(abcd) = \frac{\overline{abcd}}{9999},$$

$$0,ab(cde) = \frac{\overline{abcde} - \overline{ab}}{99900}.$$

Ví dụ 2: Tính giá trị (làm tròn đến số thập phân thứ hai) của các phép tính sau:

a. A = 124,74 + 345,95 — 264,034.

b. B = (35,0431 — 4,724) . 12,395.

c. C = (324,083 — 142,724): 23,82.

d. D = 43,203 + 31,024 — 52,341.

Giải

a. Ta được:

$$A = 124,74 + 345,95 - 264,034 = 206,656 \approx 206,66.$$

b. Ta được:

$$B \approx (35,043 - 4,724) . 12,395 = 30,319 . 12,395 = 375,804 \approx 375,8.$$

c. Ta được:

$$C = (324,083 - 142,724): 23,82 = 181,359: 23,82 = 7,614 \approx 7,61.$$

d. Ta được:

$$D = 43,203 + 31,024 - 52,341 = 21,886 \approx 21,89.$$

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Cho ví dụ về số thập phân hữu hạn và số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Câu hỏi 2: Phát biểu định lí về điều kiện để một phân số được viết dưới dạng số thập phân hữu hạn.

Câu hỏi 3: Phát biểu định lí về điều kiện để một phân số được viết dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Câu hỏi 4: Phát biểu quy tắc làm tròn số.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân:

$$\frac{1}{9};\ \frac{1}{99};\ \frac{1}{999};\ \frac{1}{9999}.$$

Bài tập 2. Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân:

$$\frac{4}{9};\ \frac{13}{99};\ \frac{41}{999};\ \frac{97}{9999}.$$

Bài tập 3. Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân:

$$\frac{-8}{9};\ \frac{1}{125};\ \frac{3}{80};\ \frac{-4}{15};\ \frac{5}{27};\ \frac{13}{14}.$$

Bài tập 4. Viết các số thập phân sau dưới dạng phân số tối giản:

0,(8) ; 1,(25) ; - 2,(38) ; 7,21(321) ; 5,(8218).

Bài tập 5. Viết các số thập phân sau dưới dạng phân số tối giản:

0,(6) ; 4,(75) ; - 6,(81) ; 8,24(25) ; 7,(8182).

Bài tập 6. Tính giá trị (làm tròn đến số thập phân thứ hai) của các phép tính sau:

a. $A = 4,2374 + 5,1295 - 6,1048.$

b. $B = (51,0431 - 14,825) \cdot 2,635.$

c. $C = (34,1086 - 42,2749) : 3,821$.

d. $D = 73,2038 + 51,527 - 42,1341$.

Bài tập 7. Tính giá trị (làm tròn đến số thập phân thứ hai) của các phép tính sau:

a. $A = 3,334 + 4,258 - 8,818$.

b. $B = (23,033 - 4,255) . 4,65$.

c. $C = (43,846 - 2,744) : 3,21$.

Bài tập 8. Tính đến hết học kì I, điểm toán của bạn Hoa như sau:

- Điểm hệ số 1 (kiểm tra miệng và 15'): 9, 6, 10.
- Điểm hệ số 2 (kiểm tra 45'): 6, 7, 9.
- Điểm kiểm tra học kì: 8.

Em hãy tính điểm trung bình môn toán học kì I của bạn Hoa (chính xác đến số thập phân thứ hai).

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 2. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 3. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 4. Ta được:

$$0,(8) = \frac{8}{9} \text{ ; } 1,(25) = 1\frac{25}{99} = \text{ ; } -2,(38) = -2\frac{38}{99} \text{ ;}$$

$$7,21(321) = 7\frac{21321 - 21}{99900} = 7\frac{71}{333} \text{ ; } 5,(8218) = 5\frac{8218}{9999}$$

Bài tập 5. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 6.

a. Ta được:

$A \approx 3,26$.

b. Ta được:

$B \approx 95,43$.

c. Ta được:

$C \approx -2,14$.

d. Ta được:

$D \approx 82,6$.

Bài tập 7. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 8.

Điểm trung bình kiểm tra của bạn Hoa là:

$$\frac{9 + 6 + 10 + 2(6 + 7 + 9)}{9} \approx 7,67.$$

Điểm trung bình học kì I của bạn Hoa là:

$$\frac{7,67.2 + 8}{3} \approx 7,8.$$

Vậy, điểm trung bình môn toán học kì I của bạn Hoa là 7,8.

CHỦ ĐỀ 8 SỐ VÔ TỈ - SỐ THỰC KHÁI NIỆM VỀ CĂN BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. SỐ VÔ TỈ

Số vô tỉ là số viết được dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

*Kí hiệu: Tập hợp số vô tỉ là **I**.*

Thí dụ 1: Ta có:

- Số pi: $\pi = 3,14159...$ là một số vô tỉ.
- Hằng số vũ trụ: $e = 2,71828...$ là một số vô tỉ.

2. KHÁI NIỆM VỀ CĂN BẬC HAI

*Căn bậc hai của một số a **không âm** là số x sao cho:*

$$x^2 = a.$$

Chú ý:

- Số dương a có đúng 2 căn bậc hai một số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$ và một số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$.
- Số 0 chỉ có duy nhất một căn bậc hai là 0 vì $\sqrt{0} = 0$.
- Số âm không có căn bậc hai.
- **Không được viết**: $\sqrt{a^2} = \pm a$.
- Ta có:

$$x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 = a \end{cases}$$

Với hai số bất kì a, b với a, b > 0. Ta có:

$$a = b \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}.$$

$$a > b \Leftrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}.$$

Thí dụ 2: Ta có:

$$x = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{4} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2.$$

$$x > 9 \Leftrightarrow \sqrt{x} > \sqrt{9} \Leftrightarrow \sqrt{x} > 3.$$

3. SỐ THỰC

*Số vô tỉ và số hữu tỉ được gọi chung là số thực. **Kí hiệu:** Tập hợp số thực là* ***R***.

Chú ý: 1. Với hai số thực x, y bất kì, ta luôn có:

$$x = y \text{ hoặc } x > y \text{ hoặc } x < y.$$

2. Việc so sánh, tính toán trên hai số thực được thực hiện tương tự như so sánh, tính toán các số hữu tỉ viết dưới dạng thập phân.
3. Mỗi số thực được biểu diễn bởi một điểm duy nhất trên trục số. Ngược lại mỗi điểm trên trục số biểu diễn một số thực duy nhất. Vì thế, trục số còn được gọi là trục số thực.

Thí dụ 3: Ta có:

Số 5,275935... là một số thực.

Số $\sqrt{2}$ là một số thực.

Số 8 là một số thực.

...

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Tìm căn bậc hai của các số sau:

a. $81 ; (-9)^2 ; 9^2 ; 0,81$. c. $-101 ; 95 ; 1$

b. $5 ; 0,2 ; n^2$ ($n \in \mathbf{Q}$). d. $n + 1$ ($n \in \mathbf{N}$).

Giải

a. Ta có:

$81 = (-9)^2 = 9^2$.

$0,81 = (0,9)^2$.

Vậy:

– Các số $81 ; (-9)^2 ; 9^2$ có hai căn bậc hai là 9 và - 9.

Số 81 có hai căn bậc hai là 0,9 và - 0,9.

b. Ta có:

$5 = (\sqrt{5})^2 = (-\sqrt{5})^2$

$0,2 = (\sqrt{0,2})^2 = (-\sqrt{0,2})^2$

$n = (-n)^2$

Vậy:

- Số 5 có hai căn bậc hai là $\sqrt{5}$ và - $\sqrt{5}$.
- Số 0,2 có hai căn bậc hai là $\sqrt{0,2}$ và - $\sqrt{0,2}$.
- Số n (n ∈ **Q**) có hai căn bậc hai là n và - n.

c. Ta có:

$$-101 < 0$$

$$95 = \left(\sqrt{95}\right)^2 = \left(-\sqrt{95}\right)^2$$

$$1 = (1)^2 = (-1)^2.$$

Vậy:

- Số — 101 không có căn bậc hai.
- Số 95 có hai căn bậc hai là $\sqrt{95}$ và - $\sqrt{95}$.
- Số 1 (n ∈ **Q**) có hai căn bậc hai là 1 và - 1.

d. Ta có:

$$n + 1 \geq 1$$

$$n + 1 = (\sqrt{n+1})^2 = (-\sqrt{n+1})^2.$$

Vậy, số n + 1 (n ∈ **N**) có hai căn bậc hai $\sqrt{n+1}$ và - $\sqrt{n+1}$.

Ví dụ 2: Tính giá trị của các đẳng thức sau:

a. $A = \sqrt{\dfrac{11}{25}+1} - \sqrt{20}\left(\sqrt{\dfrac{1}{80}} - \dfrac{1}{3\sqrt{10}}\right) + \dfrac{1}{6}.$

b. $B = 2\sqrt{\dfrac{0,01}{1,21}} + 3\dfrac{2}{\sqrt{10^2+2^2+40}} - \dfrac{3}{4}.$

Giải

a. Ta có:

$$A = \sqrt{\frac{11+25}{25}} - \sqrt{\frac{20}{80}} + \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{9.10}} + \frac{1}{6}$$

$$= \sqrt{\frac{36}{25}} - \sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{2.10}}{\sqrt{9.10}} + \frac{1}{6} = \frac{6}{5} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{13}{15} + \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{13+5\sqrt{2}}{15}.$$

b. Ta có:

$$B = 2\sqrt{\frac{1}{121}} + 3\frac{2}{\sqrt{100+4+40}} - \frac{3}{4}$$

$$= 2\sqrt{\frac{1}{11^2}} + 3\frac{2}{\sqrt{100+4+40}} - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{2}{11} + \frac{6}{\sqrt{144}} - \frac{3}{4} = \frac{2}{11} + \frac{6}{12} - \frac{3}{4} = -\frac{3}{44}$$

Ví dụ 3: So sánh hai số:

a. $m = \sqrt{9+25}$ và $n = \sqrt{9} + \sqrt{25}$. c. $\sqrt{0,04}$ và 0,04.

b. $p = \sqrt{49-16}$ và $q = \sqrt{49} - \sqrt{16}$. d. 8 và $\sqrt{8}$.

Giải

a. Ta có:

$$m = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$n = \sqrt{9} + \sqrt{25} = 3 + 5 = 8 = \sqrt{64}$$

Vậy, m < n.

b. Ta có:

$$p = \sqrt{49-16} = \sqrt{49-16} = \sqrt{33};$$

$$q = \sqrt{49} - \sqrt{16} = 7 - 4 = 3 = \sqrt{9}.$$

Vậy, p > q.

c. Ta có:

$$\sqrt{0,04} = 0,2 > 0,04$$

Vậy, $\sqrt{0,04} > 0,04$.

d. Ta có:

$$\sqrt{8} = \sqrt{2.4} = 2\sqrt{2} < 8.$$

Vậy, $\sqrt{8} < 8$.

Từ những kết quả trên ta rút ra một số nhận xét sau:

Nhận xét: 1. Với a, b ≥ 0, ta có: $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

2. Với a, b ≥ 0, a > b, ta có: $\sqrt{a-b} > \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

3. Với $0 < a < 1$, ta có: $a < \sqrt{a}$.

4. Với a > 1, ta có: $a > \sqrt{a}$.

Ví dụ 4: Tìm x biết:

a. $x^2 + 5x + 6 = 3x + 34 + 2x - 9$.

b. $2\sqrt{x} + 8x + 5 = 5x - 4 + 3x + 19$.

c. $5\sqrt{x} + 2x - 8 = 5x + 4 - 3x - 19$.

Giải

a. Ta có:

$$x^2 + 5x + 6 = 3x + 34 + 2x - 9 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 5x + 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 5x = 25 - 6 \Leftrightarrow x^2 = 19 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{19}$$

Vậy, $x = \sqrt{19}$ và $x = -\sqrt{19}$.

b. Ta có:

$$2\sqrt{x} + 8x + 5 = 5x - 4 + 3x + 19 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 8x + 5 = 8x + 15$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow x = 25.$$

Vậy, x = 25.

c. Ta có:

$$5\sqrt{x} + 2x - 8 = 5x + 4 - 3x - 19 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} + 2x - 8 = 2x - 15$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{x} = -7 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -\frac{7}{5} < 0$$

Vậy, không có giá trị nào của x.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu định nghĩa số vô tỉ và cho ví dụ.

Câu hỏi 2: Nêu định nghĩa số thực và cho ví dụ.

Câu hỏi 3: Nêu định nghĩa căn bậc hai và cho ví dụ.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tìm căn bậc hai của các số sau:

a. 25 ; $(-7)^2$; 193^2 ; $0,16$.

b. 65 ; $0,21$.

c. -100 ; 175 ; 125

d. $(n-2)^2$ $(n \in \mathbf{Q})$; $n-1$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.

Bài tập 2. Hãy tính:

a. $\sqrt{64}$.

b. $\sqrt{\dfrac{25}{64}}$.

c. $-\sqrt{(-7)^2}$.

d. $-\sqrt{\dfrac{49}{16}+2}$.

Bài tập 3. So sánh hai số sau:

a. $-\sqrt{64}$ và $-\sqrt{65}$.

b. 8 và $\sqrt{(-8)^2}$.

c. $\sqrt{(-7)^2}$ và 6.

d. $\sqrt{\dfrac{74}{25}-1}$ và $\dfrac{6}{5}$.

Bài tập 4. So sánh hai số sau:

a. $-\sqrt{64+15}$ và $-\sqrt{15}-8$.

b. $7+\sqrt{(-9)^2}$ và $\sqrt{103}$.

c. $\sqrt{54}$ và $9-\sqrt{27}$.

d. $\sqrt{\dfrac{81}{25}-\dfrac{2}{7}}$ và $\dfrac{9}{5}-\dfrac{2}{7}$.

Bài tập 5. Tìm x biết:

a. $2x^2+5x+8+\sqrt{x} = x^2+3x+35+x^2+2x-7$.

b. $3\sqrt{x}+7x+5 = \sqrt{x}+4x-6+3x+18$.

c. $8\sqrt{x}+2x-9 = 5x+7+6\sqrt{x}-3x-12$.

d. $2\sqrt{3x}+11x-18 = 5x+3+6\sqrt{3x}+6x-21$.

Bài tập 6. Tìm x biết:

a. $4,15x+8,37x-35 = -14,92$.

b. $7,53x+5,82x+17,24 = -52,25$.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Học sinh tự làm các câu a, b, c.

d. Ta có:

$(n - 2)^2 \geq 0$ ($n \in \mathbf{Q}$) ;

$n - 1 \geq 0$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

Vậy,

- Số $(n - 2)^2$ có hai căn bậc hai là n — 2 và 2 — n.
- Số n — 1 có hai căn bậc hai là $\sqrt{n-1}$ và $-\sqrt{n-1}$.

Bài tập 2.

a. Ta có:

$$\sqrt{64} = 8.$$

b. Ta có:

$$\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}.$$

c. Ta có:

$$-\sqrt{(-7)^2} = -\sqrt{49} = -7$$

d. Ta có:

$$\sqrt{\frac{49}{16} + 2} = \sqrt{\frac{49 + 2.16}{16}} = \sqrt{\frac{81}{16}} = \sqrt{\frac{9}{4}}.$$

Bài tập 3.

a. Ta có:

$$64 < 65 \Leftrightarrow \sqrt{64} < \sqrt{65} \Leftrightarrow -\sqrt{64} > -\sqrt{65}.$$

b. Ta có:

$$\sqrt{(-8)^2} = \sqrt{64} = 8.$$

c. Ta có:

$$\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7 > 6.$$

d. Ta có:

$$\sqrt{\frac{74}{25} - 1} = \sqrt{\frac{74 - 25}{25}} = \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5} > \frac{6}{5}.$$

Bài tập 4. (*Học sinh tự làm*)

Bài tập 5.

a. Ta có:

$$2x^2 + 5x + 8 + \sqrt{x} = 2x^2 + 5x + 28 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 20 \Leftrightarrow x = 400.$$

b. Ta có:

$$3\sqrt{x} + 7x + 5 = \sqrt{x} + 7x + 12 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 7 \Leftrightarrow x = \frac{49}{4}.$$

c. Ta có:

$$8\sqrt{x} + 2x - 9 = 2x + 6\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 14 \Leftrightarrow x = 49.$$

d. Ta có:

$$2\sqrt{3x} + 11x - 18 = 11x + 6\sqrt{3x} - 19 \Leftrightarrow 4\sqrt{3x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 3x = \frac{1}{16} \Leftrightarrow x = \frac{1}{48}.$$

CHƯƠNG II - HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Trong chương này, chúng ta sẽ thu nhận được :

1. **Đại lượng tỉ lệ thuận - Một số bài toán về đại lượng tỉ lệ thuận**
2. **Đại lượng tỉ lệ nghịch - Một số bài toán về đại lượng tỉ lệ nghịch**
3. **Hàm số**
4. **Mặt phẳng toạ độ**
5. **Đồ thị của hàm số $y = ax$ $(a \neq 0)$**
6. **Đồ thị của hàm số $y = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$**

CHỦ ĐỀ 1

ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Chúng ta sẽ bắt đầu với thí dụ:

Thí dụ 1:

1. Mỗi ngày Ngọc làm được 8 bài toán, khi đó tổng số bài toán s mà Ngọc làm được trong n ngày được cho bởi:

$$s = 8n. \qquad (1)$$

2. Một ôtô chuyển động đều với vận tốc 40km/h, khi đó quãng đường s (km) mà ôtô đi được trong khoảng thời gian t (h) được cho bởi:

$$s = 40t. \qquad (2)$$

Nhận xét: Các công thức (1), (2) đều có điểm giống nhau là "*Đại lượng s bằng đại lượng còn lại nhân với một hằng số khác 0*". Khi đó, người ta thường nói s *tỉ lệ thuận với n* (hoặc với t).

Từ đó, ta có định nghĩa sau:

Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức:

$$y = kx, \text{ với } k \text{ là hằng số khác } 0$$

thì ta nói y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k.

Nhận xét: Nếu y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k, tức là:

$$y = kx \Leftrightarrow x = \frac{1}{k}y$$

Tức là:

1. x cũng tỉ lệ thuận với y, do vậy ta thường nói hai đại lượng này tỉ lệ thuận với nhau.

2. x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ $\frac{1}{k}$.

Thí dụ 2: Cho y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $k = 3$.

a. Hãy biểu diễn y theo x.

b. Hỏi x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ nào ?

Giải

a. Ta có ngay:

$$y = 3x.$$

b. Từ nhận xét trên, suy ra:

" *x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ bằng* $\frac{1}{3}$ ".

2. TÍNH CHẤT

Để xây dựng tính chất của đại lượng tỉ lệ thuận chúng ta có thể bắt đầu từ định nghĩa, như sau:

Cho y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k, tức là:

$$y = kx.$$

Khi đó, với mỗi giá trị $x_1, x_2, x_3, \ldots$ khác 0 của x, ta có được tương ứng:

$$y_1 = kx_1 \Rightarrow \frac{y_1}{x_1} = k,$$

$$y_2 = kx_2 \Rightarrow \frac{y_2}{x_2} = k,$$

$$y_3 = kx_3 \Rightarrow \frac{y_3}{x_3} = k,$$

...

Ngoài ra, ta còn có:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}, \quad \frac{y_1}{y_3} = \frac{x_1}{x_3}, \ \ldots$$

Từ đó, ta có các tính chất sau:

Nếu đại lượng tỉ lệ thuận với nhau (tức là $y = kx$) thì:

1. *Tỉ số hai giá trị tương ứng của chúng luôn không đổi, tức là:*

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = .. = \frac{y_n}{x_n} = k,$$

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = .. = \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{k}.$$

2. *Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia, tức là:*

$$\frac{x_m}{x_n} = \frac{y_m}{y_n}.$$

Thí dụ 3: Cho biết hai đại lượng x và y tỉ lệ thuận với nhau và khi x = 5 thì y = 15.

a. Tìm hệ số tỉ lệ k của y đối với x.

b. Hãy biểu diễn y theo x.

c. Tính giá trị của y khi x = - 2, x = 1, x = 3, x = 8.

Giải

a. Ta có:

$$y = kx \Rightarrow k = \frac{y}{x} = \frac{15}{5} = 3.$$

b. Từ kết quả câu a), ta được:

y = 3x.

c. Ta sử dụng bảng để minh hoạ:

x	- 2	1	3	8
y = 3x	- 6	3	9	24

Nhân xét: Với bảng biểu diễn trong câu c), ta thấy đã có đầy đủ thông tin theo yêu cầu của bài ra. Do đó, trong hầu hết các trường hợp người ta thường cho bài toán dưới dạng " *Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Điền các số thích hợp vào ô trống trong bảng kèm theo* ". Thí dụ sau sẽ minh hoạ cụ thể nhận xét này.

Thí dụ 4: Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Điền các số thích hợp vào ô trống trong bảng sau:

x	- 2	- 1	3	
y		3		- 27

Giải

Vì x và y tỉ lệ thuận với nhau, giả sử:

$$y = kx \Rightarrow k = \frac{y}{x}.$$

Dựa vào thông tin trong cột thứ 3, ta suy ra:

$$k = \frac{3}{1} = -3 \Rightarrow y = -3x.$$

Khi đó, tạ viết y = - 3x vào dòng 2 cột 1 và từ đây sẽ điền được các thông tin tương ứng vào các ô trống, cụ thể:

x	- 2	- 1	3	9
y = - 3x	6	3	- 9	- 27

Nhận xét: Như vậy, hai thí dụ đã qua chỉ đi sâu khai thác tính chất đầu tiên của hai đại lượng tỉ lệ thuận. Một câu hỏi được đặt ra khá tự nhiên là " *Tính chất thứ hai được sử dụng để làm gì ?* ". Câu trả lời sẽ là " *Nó được sử dụng trong dạng toán thực nghiệm* ", tức là:

" *Cho một bảng với các giá trị x và y tương ứng. Hỏi hai đại lượng x và y có tỉ lệ thuận với nhau không ?* ".

Để trả lời được câu hỏi này, chúng ta chỉ cần thêm dòng $\frac{y}{x}$ vào bảng và điền các giá trị tương ứng cho nó, khi đó:

- Nếu các giá trị $\frac{y}{x}$ không đổi, ta kết luận x và y tỉ lệ thuận với nhau.
- Ngoài ra, kết luận x và y không tỉ lệ thuận với nhau.

Thí dụ 5: Các giá trị tương ứng của x và y được cho trong bảng:

x	- 2	- 1	3	5
y	4	2	- 6	- 10

Hai đại lượng x và y có tỉ lệ thuận với nhau hay không ? Vì sao ?

Giải

Thêm dòng $\frac{y}{x}$ vào bảng và điền các giá trị tương ứng cho nó, ta được:

x	- 2	- 1	3	5
y	4	2	- 6	- 10
$\frac{y}{x}$	- 2	- 2	- 2	- 2

Từ kết quả trong bảng trên, ta kết luận x và y tỉ lệ thuận với nhau.

3. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

Bài toán 1: Chu vi của hình chữ nhật bằng 28cm. Tính độ dài mỗi cạnh, biết rằng chúng tỉ lệ với 3, 4.

Cách giải

Gọi hai cạnh của hình chữ nhật là a, b (a < b).

Từ giả thiết ta có:

$$2(a + b) = 28cm \Leftrightarrow a + b = 14cm.$$

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{a+b}{3+4} = \frac{14}{7} = 2.$$

Từ đó, suy ra:

$a = 6$,

$b = 8$.

Vậy, ta được a = 6cm, b = 8cm.

Nhận xét: Yêu cầu đặt ra trong bài toán này chỉ có tính minh hoạ cho dạng toán tổng quát:

" *Tìm hai đại lượng tỉ lệ thuận x, y thoả mãn điều kiện K cho trước* "

Khi đó, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựa vào điều kiện K, thiết lập biểu thức:

$$S = k_1x + k_2y.$$

Bước 2: Từ giả thiết về sự tỉ lệ thuận của x và y, ta có:

$$\frac{x}{a_1} = \frac{y}{a_2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a_1} = \frac{y}{a_2} = \frac{k_1x}{k_1a_1} = \frac{k_2y}{k_2a_2} = \frac{k_1x + k_2y}{k_1a_1 + k_2a_2}.$$

Từ đây, chúng ta nhận được x và y.

Bài toán 2: Cho ΔABC có số đo các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ lần lượt tỉ lệ với 1, 2, 3. Tính số đo các góc của ΔABC.

Cách giải

Trong ΔABC, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0.$$

Từ giả thiết ta có:

$$\frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{3} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{3} = \frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{1+2+3} = \frac{180}{6} = 30^0.$$

Từ đó, suy ra:

$\hat{A} = 30^0$,

$\hat{B} = 60^0$,

$\hat{C} = 90^0$.

Vậy, ta được số đo các góc của tam giác là $\hat{A} = 30^0$, $\hat{B} = 60^0$, $\hat{C} = 90^0$.

Nhận xét: 1. Yêu cầu đặt ra trong bài toán này chỉ có tính minh hoạ cho dạng toán tổng quát:

" *Tìm ba đại lượng tỉ lệ thuận x, y, z thoả mãn điều kiện K cho trước* "

Khi đó, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựa vào điều kiện K, thiết lập biểu thức:

$$S = k_1x + k_2y + k_3z.$$

Bước 2: Từ giả thiết về sự tỉ lệ thuận của x và y, ta có:

$$\frac{x}{a_1} = \frac{y}{a_2} = \frac{z}{a_3}$$

$$\Rightarrow \frac{k_1x}{k_1a_1} = \frac{k_2y}{k_2a_2} = \frac{k_3z}{k_3a_3}$$

$$= \frac{k_1x + k_2y + k_3z}{k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3}.$$

Từ đây, chúng ta nhận được x, y và z.

2. Và, thông qua hai bài toán này chúng ta có được phương pháp giải trong trường hợp cần tìm n đại lượng tỉ lệ thuận x, y, z, t, ...

II. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa hai đại lượng tỉ lệ thuận và cho ví dụ.

Câu hỏi 2: Nêu các tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $k = -\frac{3}{4}$.

a. Hãy biểu diễn y theo x.

b. Hỏi x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ nào ?

Bài tập 2. Cho biết hai đại lượng x và y tỉ lệ thuận với nhau và khi x = - 2 thì y = 8.

a. Tìm hệ số tỉ lệ k của y đối với x

b. Hãy biểu diễn y theo x.

c. Tính giá trị của y khi x = - 2, x = - 1, x = 2, x = 6.

Bài tập 3. Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Điền các số thích hợp vào ô trống trong bảng sau:

x	- 12	- 6	- 3	3	9		
y				1		5	9

Bài tập 4. Các giá trị tương ứng của x và y được cho trong bảng:

x	- 8	- 6	2	4
y	16	12	- 4	- 8

Hai đại lượng x và y có tỉ lệ thuận với nhau hay không ? Vì sao ?

Bài tập 5. Chu vi của hình chữ nhật bằng 28cm. Tính độ dài mỗi cạnh, biết rằng chúng tỉ lệ với 2, 5.

Bài tập 6. Tính độ dài mỗi cạnh của hình chữ nhật, biết hai cạnh tỉ lệ với 1, 3 và cạnh lớn dài hơn cạnh nhỏ là 8cm.

Bài tập 7. Cho ΔABC có số đo các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ lần lượt tỉ lệ với 1, 4, 7. Tính số đo các góc của ΔABC.

Bài tập 8. Cho ΔABC có số đo các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ lần lượt tỉ lệ với 3, 5, 7. Tính số đo các góc của ΔABC.

Bài tập 9. Cho ΔABC có chu vi bằng 22cn và các cạnh a, b, c của tam giác tỉ lệ với các số 2, 4, 5. Tính độ dài các cạnh của tam giác.

Bài tập 10. Cho ΔABC có các cạnh a, b, c của tam giác tỉ lệ với các số 3, 4, 5. Tính độ dài các cạnh của tam giác, biết rằng cạnh lớn nhất dài hơn cạnh nhỏ nhất 6cm.

IV. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Ta có $y = -\frac{3}{4}x$.

b. x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ bằng $-\frac{4}{3}$.

Bài tập 2.

a. Ta có:

$$y = kx \Rightarrow k = \frac{y}{x} = \frac{8}{-2} = -4.$$

b. Từ kết quả câu a), ta được:

$$y = -4x.$$

c. Ta sử dụng bảng để minh hoạ:

x	- 2	- 1	2	6
y = - 4x	8	4	- 8	- 24

Bài tập 3. Ta có kết quả:

x	- 12	- 6	- 3	3	9	15	27
$y = \frac{1}{3}x$	- 4	- 2	- 1	1	3	5	9

Bài tập 4. x và y tỉ lệ thuận với nhau.

Bài tập 5. Gọi a, b (a < b) là hai cạnh của hình chữ nhật, ta được a = 4cm, b = 10cm.

Bài tập 6. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 7. Trong ΔABC, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0.$$

Từ giả thiết ta có:

$$\frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{7} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{7} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{1 + 4 + 7} = \frac{180}{12} = 15^0.$$

Từ đó, suy ra:

$$\hat{A} = 15^0,\ \hat{B} = 60^0,\ \hat{C} = 105^0.$$

Vậy, ta được số đo các góc của tam giác là $\hat{A} = 15^0$, $\hat{B} = 60^0$, $\hat{C} = 105^0$.

Bài tập 8. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 9. Từ giả thiết ta có:

$a + b + c = 22cm$,

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{2+4+5} = \frac{22}{11} = 2.$$

Từ đó, suy ra:

$a = 2.2 = 4$,

$y = 4.2 = 8$,

$z = 5.2 = 10$.

Vậy, ta được độ dài các cạnh của tam giác là a = 4cm, b = 8cm, c = 10cm.

Bài tập 10. Từ giả thiết ta có:

$c - a = 6cm$,

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{c-a}{5-3} = \frac{6}{2} = 3.$$

Từ đó, suy ra:

$a = 3.3 = 9$,

$y = 4.3 = 12$,

$z = 5.3 = 15$.

Vậy, ta được độ dài các cạnh của tam giác là a = 9cm, b = 12cm, c = 15cm.

CHỦ ĐỀ 2 — ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Chúng ta sẽ bắt đầu với thí dụ:

Thí dụ 1:

1. Hình chữ nhật có các cạnh là x, y với kích thước thay đổi nhưng diện tích luôn bằng 39 cm^2, khi đó ta được:

$$39 = xy \Leftrightarrow y = \frac{39}{x}. \quad (1)$$

2. Một ôtô chuyển động đều với vận tốc x (km/h) trong khoảng thời gian y (h) nó đi được quãng đường là 33km, khi đó ta được:

$$33 = xy \Leftrightarrow y = \frac{33}{x}. \quad (2)$$

Nhận xét: Các công thức (1), (2) đều có điểm giống nhau là " *Đại lượng y bằng một hằng số khác 0 chia cho đại lượng x* ". Khi đó, người ta thường nói *y tỉ lệ nghịch với x.*

Từ đó, ta có định nghĩa sau:

Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức:

$$y = \frac{k}{x} \text{ (hoặc } xy = k\text{), với k là hằng số khác 0}$$

thì ta nói y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ k.

Nhận xét: Nếu y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ k, tức là:

$$xy = k \Leftrightarrow x = \frac{k}{y}.$$

Tức là:

1. x cũng tỉ lệ nghịch với y, do vậy ta thường nói hai đại lượng này tỉ lệ nghịch với nhau.

2. x tỉ lệ nghịch với y theo hệ số tỉ lệ k. Do đó, với tỉ lệ nghịch chúng ta không phân biệt cách phát biểu " *hệ số tỉ lệ của y đối với x* " với " *hệ số tỉ lệ của x đối với y* " mà thường gọi chung là hệ số tỉ lệ.

Thí dụ 2: Cho x và y tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ $k = \frac{1}{2}$.

a. Hãy biểu diễn y theo x.

b. Tính giá trị của y khi $x = -\frac{1}{16}$.

Giải

a. Ta có ngay:

$$xy = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2x}.$$

b. Với $x = -\frac{1}{16}$, ta có ngay $y = -8$.

2. TÍNH CHẤT

Để xây dựng tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch chúng ta có thể bắt đầu từ định nghĩa, như sau:

Cho y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ k, tức là:

$$y = \frac{k}{x}.$$

Khi đó, với mỗi giá trị $x_1, x_2, x_3, \ldots$ khác 0 của x, ta có được tương ứng:

$$y_1 = \frac{k}{x_1} \Rightarrow x_1 y_1 = k,$$

$$y_2 = \frac{k}{x_2} \Rightarrow x_2 y_2 = k,$$

$$y_3 = \frac{k}{x_3} \Rightarrow x_3 y_3 = k,$$

...

Ngoài ra, ta còn có:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}, \quad \frac{y_1}{y_3} = \frac{x_3}{x_1}, \ \ldots$$

Từ đó, ta có các tính chất sau:

Nếu đại lượng tỉ lệ nghịch với nhau (tức là $y = \frac{k}{x}$) thì:

1. *Tích hai giá trị tương ứng của chúng luôn không đổi, tức là:*

$$x_1y_1 = x_2y_2 = x_3y_3 = .. = x_ny_n = k,$$

2. *Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng nghịch đảo của tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia, tức là:*

$$\frac{x_m}{x_n} = \frac{y_n}{y_m}.$$

3. ***(Quan trọng)**: Nếu ta viết:*

$$y = k.\frac{1}{x}$$

Như vậy, ta có tương ứng mới:

" y tỉ lệ thuận với $\frac{1}{x}$ theo hệ số tỉ lệ bằng k "

Thí dụ 3: Cho biết hai đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau và khi $x = 2$ thì $y = 9$.

a. Tìm hệ số tỉ lệ k.

b. Hãy biểu diễn y theo x.

c. Tính giá trị của y khi $x = -2$, $x = 1$, $x = 3$, $x = 8$.

Giải

a. Ta có:

$$xy = k \Rightarrow k = 2.9 = 18.$$

b. Từ kết quả câu a), ta được:

$$xy = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{x}.$$

c. Ta sử dụng bảng để minh hoạ:

x	- 3	1	6	9
$y = \frac{18}{x}$	- 6	18	3	2

Nhân xét: Với bảng biểu diễn trong câu c), ta thấy đã có đầy đủ thông tin theo yêu cầu của bài ra. Do đó, trong hầu hết các trường hợp người ta thường cho bài toán dưới dạng " *Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Điền các số thích hợp vào ô trống trong bảng kèm theo* ". Thí dụ sau sẽ minh hoạ cụ thể nhận xét này.

Thí dụ 4: Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Điền các số thích hợp vào ô trống trong bảng sau:

x	- 9	- 1		3
y		- 27	27	

Giải

Vì x và y tỉ lệ nghịch với nhau, giả sử:

$xy = k.$

Dựa vào thông tin trong cột thứ 3, ta suy ra:

$$k = (-1)(-27) = 27 \Rightarrow y = \frac{27}{x}.$$

Khi đó, ta viết $y = \frac{27}{x}$ vào dòng 2 cột 1 và từ đây sẽ điền được các thông tin tương ứng vào các ô trống, cụ thể:

x	- 9	- 1	1	3
$y = \frac{27}{x}$	- 3	- 27	27	9

Nhân xét: Với " *dạng toán thực nghiệm* ", tức là:

" *Cho một bảng với các giá trị x và y tương ứng. Hỏi hai đại lượng x và y có tỉ lệ nghịch với nhau không ?* ".

Để trả lời được câu hỏi này, chúng ta chỉ cần thêm dòng xy vào bảng và điền các giá trị tương ứng cho nó, khi đó:

- Nếu các giá trị xy không đổi, ta kết luận x và y tỉ lệ nghịch với nhau.
- Ngoài ra, kết luận x và y không tỉ lệ nghịch với nhau.

Thí dụ 5: Các giá trị tương ứng của x và y được cho trong bảng:

x	- 2	- 1	4	8
y	- 8	- 16	4	2

Hai đại lượng x và y có tỉ lệ nghịch với nhau hay không ? Vì sao ?

Giải

Thêm dòng xy vào bảng và điền các giá trị tương ứng cho nó, ta được:

x	- 2	- 1	4	8
y	- 8	- 16	4	2
xy	16	16	16	16

Từ kết quả trong bảng trên, ta kết luận x và y tỉ lệ nghịch với nhau.

3. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

Bài toán 1: Một ôtô đi từ A đến B với vận tốc 60km/h và trở về A với vận tốc 48km/h. Cả đi lẫn về (không tính thời gian nghỉ) mất 13h30'. Tính độ dài quãng đường AB.

Cách giải

Giả sử:

- Ôtô đi từ A đến B với vận tốc 60km/h với thời gian là t_1 (h).
- Ôtô đi từ B về A với vận tốc 48km/h với thời gian là t_2 (h).

Vì vận tốc và thời gian của một chuyển động đều trên cũng một quãng đường là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên:

$$\frac{60}{48} = \frac{t_2}{t_1} \Leftrightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{t_1}{4} = \frac{t_2}{5}. \qquad (1)$$

Theo giả thiết, ta có:

$$t_1 + t_2 = 13h30' = 13\frac{1}{2}.$$

Khi đó, từ dãy tỉ số (1), ta được:

$$\frac{t_1}{4} = \frac{t_2}{5} = \frac{t_1 + t_2}{4 + 5} = \frac{13\frac{1}{2}}{9} = \frac{3}{2} \Rightarrow t_1 = 6h.$$

Vậy, độ dài quãng đường AB là 60.6 = 360km.

Nhân xét:

1. Rất nhiều em học sinh sẽ mắc phải lỗi không [illegible] thực hiện phép đổi đơn vị 13h30' thành số thập phân.
2. Nếu sử dụng tính chất 3, ta có thể lập luận:

   Vì vận tốc và thời gian của một chuyển động đều trên cũng một quãng đường là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên t_1, t_2 tỉ lệ với $\frac{1}{60}, \frac{1}{48}$, suy ra

   $$\frac{t_1}{\frac{1}{60}} = \frac{t_2}{\frac{1}{48}} \Leftrightarrow \frac{t_1}{4} = \frac{t_2}{5}.$$

   Điều này, sẽ thực sự có ích khi cần tìm tới nhiều hơn một đại lượng.
3. Nếu không muốn sử dụng dãy tỉ số bằng nhau, chúng ta có thể trình bày lời giải trên theo cách:

   Lập luận tương tự như trong bài toán để có:

   $$\frac{t_2}{t_1} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 4t_2 = 5t_1.$$

   Theo giả thiết, ta có:

   $$t_1 + t_2 = 13h30' = 13,5 \Leftrightarrow 4(t_1 + t_2) = 4.13,5$$

   $$\Leftrightarrow 4t_1 + 4t_2 = 54 \Leftrightarrow 4t_1 + 5t_1 = 54 \Leftrightarrow t_1 = 6.$$

   Vậy, độ dài quãng đường AB là 60.6 = 360km.
4. Yêu cầu đặt ra trong bài toán này chỉ có tính minh hoạ cho dạng toán tổng quát:

   " *Tìm đại lượng x, biết x tỉ lệ nghịch với y và thoả mãn điều kiện K cho trước* "

Khi đó, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định mối quan hệ giữa các đại lượng tỉ lệ nghịch, dựa trên công thức:

$$\frac{x_m}{x_n} = \frac{y_n}{y_m}$$

Hoặc dựa trên tính chất 3.

Bước 2: Khai thác điều kiện K và vận dụng linh hoạt kiến thức về dãy tỉ số bằng nhau (nếu cần). Từ đây, chúng ta nhận được x.

Bài toán 2: Ba nhóm học sinh cùng tham ra trồng cây (mỗi nhóm đều phải trồng n cây). Nhóm I trồng xong trong 3 ngày, nhóm II trồng xong trong 5 ngày, nhóm III trồng xong trong 6 ngày. Hỏi mỗi nhóm có bao nhiêu học sinh, biết rằng nhóm thứ hai có nhiều hơn nhóm thứ ba 1 học sinh (năng suất trồng câu của mỗi học sinh bằng nhau).

Cách giải

Giả sử, số học sinh của ba nhóm theo thứ tự là x, y, z.

- Nhóm I với x học sinh hoàn thành công việc trong 3 ngày.
- Nhóm II với y học sinh hoàn thành công việc trong 5 ngày.
- Nhóm III với z học sinh hoàn thành công việc trong 6 ngày.

Vì số học sinh và thời gian hoàn thành công việc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên x, y, z tỉ lệ với $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$, suy ra:

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{5}} = \frac{z}{\frac{1}{6}}. \qquad (1)$$

Theo giả thiết, ta có:

$$y - z = 1.$$

Khi đó, từ dãy tỉ số (1), ta được:

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{5}} = \frac{z}{\frac{1}{6}} = \frac{y - z}{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{30}} = 30.$$

Từ đó, suy ra:

$$x = \frac{1}{3}.30 = 10,$$

$$y = \frac{1}{5}.30 = 6,$$

$$z = \frac{1}{6}.30 = 5.$$

Vậy, nhóm I có 10 học sinh, nhóm II có 6 học sinh và nhóm III có 5 học sinh.

II. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa hai đại lượng tỉ lệ nghịch và cho ví dụ.

Câu hỏi 2: Nêu các tính chất của hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho hai đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ k =16.

a. Hãy biểu diễn y theo x.

b. Tính giá trị của y khi $x = -\frac{1}{4}$.

Bài tập 2. Cho biết hai đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau và khi x = 4 thì y = 9.

a. Tìm hệ số tỉ lệ k.

b. Hãy biểu diễn y theo x.

c. Tính giá trị của y khi x = - 9, x = - 6, x = 3, x = 12, x = 36.

Bài tập 3. Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Điền các số thích hợp vào ô trống trong bảng sau:

x	- 20	- 12	2	3	4	5	
y		- 5					10

Bài tập 4. Các giá trị tương ứng của x và y được cho trong bảng:

x	2	3	5	6
y	15	10	6	5

Hai đại lượng x và y có tỉ lệ nghịch với nhau hay không ? Vì sao ?

Bài tập 5. Một ôtô đi từ A đến B hết 6h. Hỏi khi từ B quay về A nó đi hết mấy giờ, biết rằng vận tốc lúc về bằng 1, 5 lần vận tốc lúc đi.

Bài tập 6. Biết 3 học sinh khi làm vệ sinh lớp học hết 3 phút. Hỏi 5 học sinh (cùng năng suất) sẽ làm vệ sinh lớp học hết bao nhiêu phút ?

Bài tập 7. 36 em học sinh chia làm bốn nhóm cùng tham ra trồng cây (mỗi nhóm đều phải trồng n cây). Nhóm I trồng xong trong 4 ngày, nhóm II trồng xong trong 6 ngày, nhóm III trồng xong trong 10 ngày, nhóm IV trồng xong trong 12 ngày. Hỏi mỗi nhóm có bao nhiêu học sinh, biết rằng năng suất trồng câu của mỗi học sinh bằng nhau.

Bài tập 8. Hai ôtô cùng đi từ A đến B. Xe thứ nhất đi hết 1h20', xe thứ hai đi hết 1h30'. Tính vận tốc trung bình của mỗi xe, biết rằng trung bình 1 phút xe thứ nhất đi nhanh hơn xe thứ hai 100m.

IV. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Ta có ngay $xy = 16 \Leftrightarrow y = \frac{16}{x}$.

b. Với $x = -\frac{1}{4}$, ta có ngay y = - 64.

Bài tập 2.

a. Ta có:

$$xy = k \Rightarrow k = 4.9 = 36.$$

b. Từ kết quả câu a), ta được:

$$xy = 36 \Rightarrow y = \frac{36}{x}.$$

c. Ta sử dụng bảng để minh hoạ:

x	-9	-6	3	12	36
$y = \frac{36}{x}$	-4	-6	12	3	1

Bài tập 3. Vì x và y tỉ lệ nghịch với nhau, giả sử:

$$xy = k.$$

Dựa vào thông tin trong cột thứ 3, ta suy ra:

$$k = (-12)(-5) = 60 \Rightarrow y = \frac{60}{x}.$$

Khi đó, ta viết $y = \frac{60}{x}$ vào dòng 2 cột 1 và từ đây sẽ điền được các thông tin tương ứng vào các ô trống, cụ thể:

x	-20	-12	2	3	4	5	6
$y = \frac{60}{x}$	-3	-5	30	10	15	12	10

Bài tập 4. Thêm dòng xy vào bảng và điền các giá trị tương ứng cho nó, ta được:

x	2	3	5	6
y	15	10	6	5
xy	30	30	30	30

Từ kết quả trong bảng trên, ta kết luận x và y tỉ lệ nghịch với nhau.

Bài tập 5. Giả sử:

- Ôtô đi từ A đến B với vận tốc v_1 và thời gian là $t_1 = 6$ (h).
- Ôtô đi từ B về A với vận tốc v_2 và thời gian là t_2 (h).

Vì vận tốc và thời gian của một chuyển động đều trên cũng một quãng đường là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_2}{6} \Leftrightarrow t_2 = \frac{6v_1}{v_2}. \qquad (1)$$

Theo giả thiết, ta có:

$$v_2 = 1,5v_1 \Leftrightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{1,5}. \qquad (2)$$

Thay (2) và (1), ta được:

$$t_2 = 6.\frac{1}{1,5} = 4h.$$

Vậy, với vẫn tốc mới khi quay về ôtô đi hêt 4h.

Bài tập 6. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 7. Giả sử, số học sinh của bốn nhóm theo thứ tự là x, y, z, t.

- Nhóm I với x học sinh hoàn thành công việc trong 4 ngày.
- Nhóm II với y học sinh hoàn thành công việc trong 6 ngày.
- Nhóm III với z học sinh hoàn thành công việc trong 10 ngày.
- Nhóm IV với t học sinh hoàn thành công việc trong 12 ngày.

Vì số học sinh và thời gian hoàn thành công việc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên x, y, z tỉ lệ với $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}$, suy ra:

$$\frac{x}{\frac{1}{4}} = \frac{y}{\frac{1}{6}} = \frac{z}{\frac{1}{10}} = \frac{t}{\frac{1}{12}}. \qquad (1)$$

Theo giả thiết, ta có:

$$x + y + z + t = 36.$$

Khi đó, từ dãy tỉ số (1), ta được:

$$\frac{x}{\frac{1}{4}} = \frac{y}{\frac{1}{6}} = \frac{z}{\frac{1}{10}} = \frac{t}{\frac{1}{12}} = \frac{x + y + x + t}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}} = \frac{36}{\frac{36}{60}} = 60.$$

Từ đó, suy ra:

$$x = \frac{1}{4}.60 = 15,\ \ y = \frac{1}{6}.60 = 10,\ \ z = \frac{1}{10}.60 = 6,\ \ t = \frac{1}{12}.60 = 5.$$

Vậy, nhóm I có 15 học sinh, nhóm II có 10 học sinh, nhóm III có 6 học sinh và nhóm IV có 5 học sinh.

CHỦ ĐỀ 3

HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ HÀM SỐ

Chúng ta sẽ bắt đầu với thí dụ:

Thí dụ 1:

1. Các giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y cho trong bảng:

x	- 2	- 1	0	1	2	3	9
y	4	1	0	1	4	9	81

2. Hình chữ nhật có một cạnh bằng 8, cạnh còn lại bằng x thay đổi, khi đó diện tích y của hình chữ nhật luôn được cho bởi:

$$y = 8x,\ x > 0. \qquad (1)$$

3. Một ôtô chuyển động đều với vận tốc x (km/h) trong khoảng thời gian y (h) nó đi được quãng đường là 39km, khi đó ta được:

$$xy = 39 \Leftrightarrow y = \frac{39}{x}. \qquad (2)$$

Nhận xét: Thông tin cho trong bảng cũng như các công thức (1), (2) đều có điểm giống nhau là " *Đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x và với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được một giá trị tương ứng của y* ". Khi đó, người ta thường nói *y là hàm số của x.*

2. KHÁI NIỆM HÀM SỐ

Từ đó, ta có định nghĩa sau:

Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x và với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x và x gọi là biến số.

Thí dụ 2: Chúng ta đã được làm quen với các hàm số:

$y = kx \rightarrow$ *x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau.*

$y = \frac{k}{x} \rightarrow$ *x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch với nhau.*

Chú ý: 1. Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị thì y được gọi là *hàm hằng*.

2. Hàm số có thể được cho bằng bảng, bằng công thức.

3. Khi y là hàm số của x ta có thể viết y = f(x), y = g(x), ...Chẳng hạn với hàm số được cho bởi công thức y = 3x - 6, ta còn có thể viết y = f(x) = 3x - 6 và khi đó, thay cho các câu " *khi x = 2 thì giá trị tương ứng của y là 0*" ta viết f(2) = 0.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không, nếu:

a. Bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

x	- 4	- 2	0	1	3	5	7
y	- 9	- 5	- 1	1	5	9	13

b. Bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

x	0	2	4	6	8	10	12
y	6	6	6	6	6	6	6

Giải

a. Có là hàm số, bởi với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y.

b. Có là hàm số, bởi với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y, và đây là hàm hằng y = 6.

Ví dụ 2: Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không, nếu:

a. Bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

x	- 6	- 2	- 1	0	1	1	3
y	8	4	2	- 1	1	6	8

b. Có công thức $y^2 = 4x$.

Giải

a. Không là hàm số, vì với x = 1 ta xác định được hai giá trị khác nhau của y là 1 và 6.

b. Không là hàm số, vì với x = 4 ta được:

$$y^2 = 4.4 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4$$

tức là, với x = 4 ta xác định được hai giá trị khác nhau của y là 4 và - 4.

Ví dụ 3: Hàm số y = f(x) được cho bởi công thức $f(x) = \frac{12}{x}$.

a. Hãy điền các giá trị tương ứng của hàm số y = f(x) vào bảng sau:

x	- 6	- 4	2	3	
y = f(x)					1

b. Xác định f(- 12), f(24).

Giải

a. Ta có được kết quả:

x	- 6	- 4	2	3	12
$y = \frac{12}{x}$	- 2	- 3	6	4	1

b. Ta có:

$$f(-12) = \frac{12}{-12} = -1,$$

$$f(24) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 4: Cho hàm số y = f(x) được cho bởi công thức f(x) = |2x - 3|.

a. Tính f(- 2), f(0), f(2), f(8).

b. Tính các giá trị của x ứng với y = - 1, y = 0, y = 3.

Giải

a. Ta lần lượt có:

$f(-2) = |2(-2) - 3| = |-4 - 3| = |-7| = 7,$

$f(0) = |2x - 3| = |2.0 - 3| = |-3| = 3,$

$f(2) = |2x - 3| = |2.2 - 3| = |1| = 1,$

$f(8) = |2x - 3| = |2.8 - 3| = |16 - 3| = 13.$

b. Ta lần lượt có:

- Với y = - 1 thì:

  |2x - 3| = - 1, vô nghiệm bởi |2x - 3| ≥ 0.

- Với y = 0 thì:

$$|2x - 3| = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

- Với y = 3 thì:

$|2x - 3| = 3$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 3 = 3 \\ 2x - 3 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 6 \\ 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Ví dụ 5: Cho hàm số y = 3x - 1. Tìm các giá trị của x sao cho:

a. y nhận giá trị âm.

b. y nhận giá trị lớn hơn 5.

Giải

a. Để y nhận giá trị âm điều kiện là:

$$3x - 1 < 0 \Leftrightarrow 3x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}.$$

Vậy, với $x < \frac{1}{3}$ thì y nhận giá trị âm.

b. Để y nhận giá trị lớn hơn 5 điều kiện là:

$$3x - 1 > 5 \Leftrightarrow 3x > 6 \Leftrightarrow x > 2.$$

Vậy, với x > 2 thì y nhận giá lớn hơn 5.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa hàm số. Thế nào là hàm hằng ?

Câu hỏi 2: Hàm số có thể được cho bằng những cách gì ? Cho ví dụ.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không, nếu bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3
y	- 6	- 4	- 2	0	2	4	6

Bài tập 2. Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không, nếu bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

x	- 4	- 2	0	1	3	5	7
y	8	8	8	8	8	8	8

Bài tập 3. Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không, nếu bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

x	- 8	- 4	- 4	- 2	0	3	5
y	2	4	12	6	1	7	9

Bài tập 4. Hàm số y = f(x) được cho bởi công thức $f(x) = \frac{36}{x}$.

a. Hãy điền các giá trị tương ứng của hàm số y = f(x) vào bảng sau:

x	- 9	- 6	3	12	
y = f(x)					1

b. Xác định f(- 12), f(72).

Bài tập 5. Hàm số y = f(x) được cho bởi công thức f(x) = 2x + 9.

a. Hãy điền các giá trị tương ứng của hàm số y = f(x) vào bảng sau:

x	- 3	- 1	2	6	
y = f(x)					27

b. Xác định f(- 8), f(7).

Bài tập 6. Cho hàm số y = f(x) được cho bởi công thức $f(x) = x^2 - 9$.

a. Tính f(- 4), f(- 2), f(0), f(1), f(5).

b. Tính các giá trị của x ứng với y = - 8, y = - 5, y = 0, y = - 10.

Bài tập 7. Cho hàm số y = f(x) được cho bởi công thức $f(x) = |x^2 - 1|$.

a. Tính f(- 2), f(0), f(3), f(6).

b. Tính các giá trị của x ứng với y = - 9, y = 0, y = 8.

Bài tập 8. Cho hàm số y = 2x - 6. Tìm các giá trị của x sao cho:

a. y nhận giá trị dương.

b. y nhận giá trị nhỏ hơn 3.

Bài tập 9. Cho hàm số y = 6 — 5x. Tìm các giá trị của x sao cho:

a. y nhận giá trị âm.

b. y nhận giá trị lớn hơn 1.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Có là hàm số.

Bài tập 2. Có là hàm số và đây là hàm hằng y = 8.

Bài tập 3. Không là hàm số, vì với x = - 4 ta xác định được hai giá trị khác nhau của y là 4 và 12.

Bài tập 4.

a. Ta có được kết quả:

x	- 9	- 6	3	12	36
$y = \frac{36}{x}$	- 4	- 6	12	3	1

b. Ta có $f(-12) = -3$, $f(72) = \frac{1}{2}$.

Bài tập 5. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 6.

a. Ta lần lượt có:

$f(-4) = (-4)^2 - 9 = 16 - 9 = 7$,

$f(-2) = (-2)^2 - 9 = 4 - 9 = -5$,

$f(0) = 0 - 9 = -9$,

$f(1) = 1^2 - 9 = 1 - 9 = -8$,

$f(5) = 5^2 - 9 = 25 - 9 = 16$.

b. Ta lần lượt có:

- Với $y = -8$ thì:

  $x^2 - 9 = -8 \Leftrightarrow x^2 = -8 + 9 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

- Với $y = -5$ thì:

  $x^2 - 9 = -5 \Leftrightarrow x^2 = -5 + 9 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

- Với $y = 0$ thì:

  $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

- Với $y = -10$ thì:

  $x^2 - 9 = -10 \Leftrightarrow x^2 = -1$, không tồn tại x.

Bài tập 7. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 8.

a. Để y nhận giá trị dương điều kiện là:

$2x - 6 > 0 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3$.

Vậy, với $x > 3$ thì y nhận giá trị dương.

b. Để y nhận giá trị nhỏ hơn 3 điều kiện là:

$2x - 6 < 3 \Leftrightarrow 2x < 9 \Leftrightarrow x < \frac{9}{2}$.

Vậy, với $x < \frac{9}{2}$ thì y nhận giá nhỏ hơn 3.

Bài tập 9. *Học sinh tự làm.*

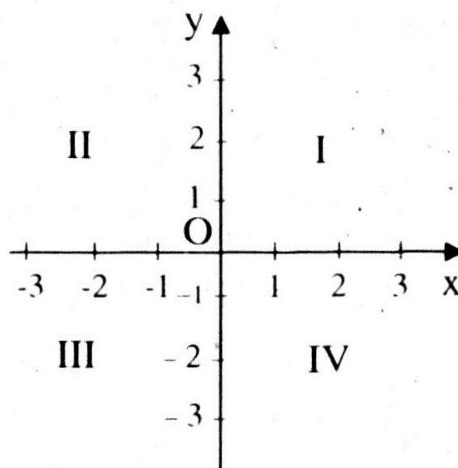
CHỦ ĐỀ 4

MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

Trên mặt phẳng, vẽ hai trục số Ox, Oy vuông góc với nhau tại O. Khi đó ta có hệ trục toạ độ Oxy.



Trong hệ trục toạ độ Oxy, ta có:

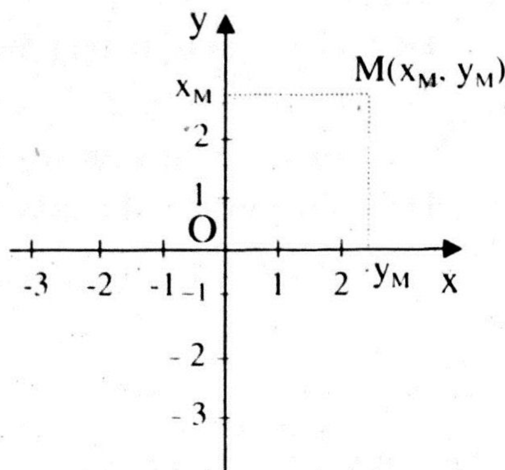
- Ox, Oy gọi là các *trục toạ độ*.
- Ox gọi là *trục hoành* (người ta thường vẽ Ox nằm ngang).
- Oy gọi là *trục tung* (người ta thường vẽ Oy thẳng đứng).
- Giao điểm O biểu diễn số 0 của cả hai trục gọi là *gốc toạ độ*.

Mặt phẳng có hệ trục toạ độ Oxy gọi là *mặt phẳng toạ độ Oxy*.

Chú ý:
1. Các đơn vị dài trên hai trục toạ độ được chọn bằng nhau (nếu không nói gì thêm).
2. Hai trục toạ độ chia mặt phẳng thành 4 góc, bao gồm góc phần tư thứ I, II, III, IV theo thứ tự ngược chiều quay của kim đồng hồ.

2. TOẠ ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM TRONG MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

Trên mặt phẳng toạ độ:



- Mỗi điểm M xác định một cặp số (x_M, y_M). Ngược lại, mỗi cặp số (x_M, y_M) xác định một điểm M.
- Cặp số (x_M, y_M) được gọi là *toạ độ của điểm* M, x_m được gọi là *hoành độ* và y_M được gọi là *tung độ* của điểm M.
- Điểm M có toạ độ (x_M, y_M) được kí hiệu là $M(x_M, y_M)$ - *Lưu ý rằng hoành độ luôn được viết trước*.

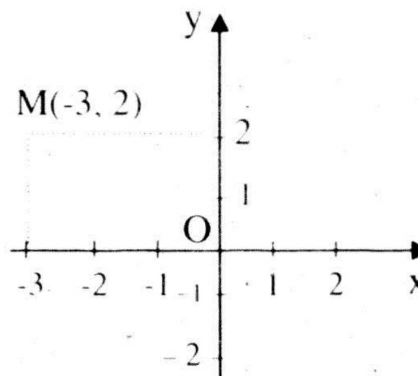
Chú ý: Ta luôn có O(0, 0).

Thí dụ 1: Với điểm M(- 3, 2) được hiểu là:

- Điểm M có hoành độ bằng - 3.
- Điểm M có tung độ bằng 2.

Khi đó để xác định vị trí của điểm M trên mặt phẳng toạ độ, ta thực hiện:

- Xác định điểm — 3 trên Ox, từ đó dựng tia vuông góc với Ox (hoặc song song với Oy).
- Xác định điểm 2 trên Oy, từ đó dựng tia vuông góc với Oy (hoặc song song với Ox).
- Hai tia trên gặp nhau tại M.



Nhận xét: 1. Mọi điểm A thuộc Ox luôn có toạ độ A(x_A, 0). Như vậy, khi nói *A thuộc Ox* được hiểu là $x_A = 0$.

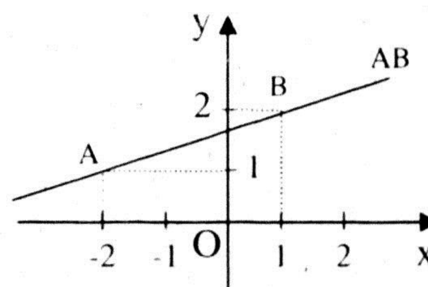
2. Mọi điểm B thuộc Oy luôn có toạ độ B(0, y_B). Như vậy, khi nói *B thuộc Oy* được hiểu là $y_B = 0$.

Thí dụ 2: Vẽ đường thẳng AB, biết A(- 2, 1) và B(1, 2).

Giải

Để vẽ đường thẳng AB, ta thực hiện như sau:

- Trên mặt phẳng toạ độ, xác định các điểm A(- 2, 1) và B(1, 2).
- Nối hai điểm A và B, ta được đường thẳng AB.



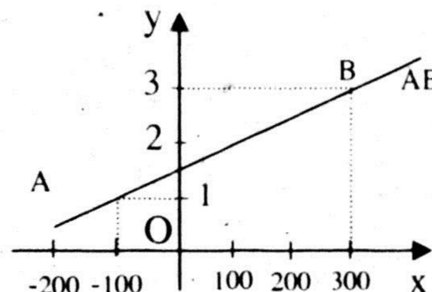
II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Vẽ đường thẳng AB, biết A(- 100, 1) và B(300, 3).

Giải

Để vẽ đường thẳng AB, ta thực hiện như sau:

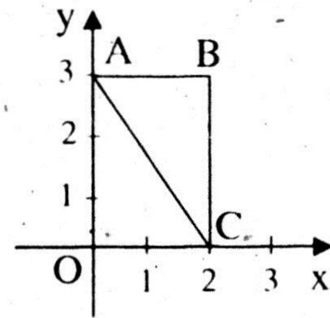
- Trên mặt phẳng toạ độ, xác định các điểm A(-100, 1) và B(300, 3).
- Nối hai điểm A và B, ta được đường thẳng AB.



Nhận xét: Trong phần kiến thức cơ bản chúng ta đã thấy chú ý " *Các đơn vị dài trên hai trục toạ độ được chọn bằng nhau (nếu không nói gì thêm)* ". Tuy nhiên, với toạ độ A(- 100, 1) và B(300, 3) nếu ta sử dụng đơn vị dài trên hai trục toạ độ là như nhau thì việc vẽ đường thẳng AB là sẽ vượt ra ngoài khuôn khổ trang vở, do đó ở đây ta chọn tỉ lệ trên trục Ox bằng 1 : 100.

Ví dụ 2: Vẽ ΔABC, biết A(0, 3), B(2, 3) và C(2, 0). Khi đó có nhận xét gì về ΔABC ?

Giải



Để vẽ ΔABC, ta thực hiện như sau:

- Trên mặt phẳng toạ độ, xác định các điểm A(0, 3), B(2, 3) và C(2, 0).
- Nối các điểm A, B và C, ta được ΔABC.

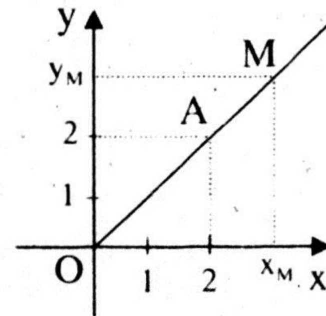
Nhận thấy rằng, ΔABC là tam giác vuông tại C

Ví dụ 3: Trên hệ trục toạ độ Oxy, vẽ tia phân giác của góc phần tư thứ I.

a. Lấy điểm A trên tia phân giác đó có hoành độ $x_A = 2$, hãy xác định tung độ của điểm A.

b. Nhận xét gì về mối liên hệ giữa hoành độ và tung độ của các điểm M nằm trên tia phân giác đó.

Giải



a. Dựa vào hình vẽ, ta thấy ngay:

$$y_A = 2.$$

b. Mọi điểm $M(x_M, y_M)$ thuộc đường phân giác trên ta đều có:

$$x_M = y_M \geq 0.$$

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu định nghĩa mặt phẳng toạ độ và vẽ hình.

Câu hỏi 2: Các đơn vị dài trên hai trục toạ độ được chọn như thế nào ?

Câu hỏi 3: Điểm $M(x_M, y_M)$ được hiểu như thế nào ?

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Trên hệ trục toạ độ Oxy, vẽ các đường phân giác của các góc phần tư thứ II, IV.

a. Lấy điểm A trên đường phân giác đó có hoành độ $x_A = -3$, hãy xác định tung độ của điểm A.

b. Nhận xét gì về mối liên hệ giữa tung độ và hoành độ của các điểm M nằm trên đường phân giác đó.

Bài tập 2. Trên hệ trục toạ độ Oxy, vẽ các đường phân giác của các góc phần tư thứ I, III.

a. Lấy điểm A trên đường phân giác đó có hoành độ $x_A = 6$, hãy xác định tung độ của điểm A.

b. Nhận xét gì về mối liên hệ giữa tung độ và hoành độ của các điểm M nằm trên đường phân giác đó.

Bài tập 3. Vẽ đường thẳng AB, biết:

a. A(- 3, - 1) và B(2, 3).

b. A(- 2, - 1) và B(- 1, 4).

c. A($\frac{5}{4}$, 2) và B(3, 2).

d. A($\frac{1}{2}$, 0) và B(0, $\frac{3}{2}$).

e. A(2700, 1) và B(- 900, - 3).

Bài tập 4. Vẽ ΔABC, biết:

a. A(1, 1), B(2, 5) và C(4, - 1).

b. A(- 2, 1), B(0, 4) và C(3, 0).

c. A(- 180, - 30), B(- 60, 60) và C(90, 15).

Bài tập 5. Vẽ tứ giác ABCD, biết:

a. A(- 1, 1), B(- 1, 3), C(2, 3) và D(2, 1). Tứ giác ABCD là hình gì ?

b. A(- 2, 1), B(- 2, 3), C(2, 3) và D(2, - 1). Tứ giác ABCD là hình gì ?

Bài tập 6. Vẽ ngũ giác ABCDE, biết:

a. A(- 2, 0), B(- 2, 2), C(0, 4), D(2, 2), E(2, 0).

b. A(- 3, 0), B(0, 4), C(2, 0), D(0, - 3), E(- 3, - 3).

Bài tập 7. Cho A(x_A, y_A), tìm điều kiện của x_A và y_A để:

a. Điểm A thuộc trục Ox.

b. Điểm A thuộc trục Oy.

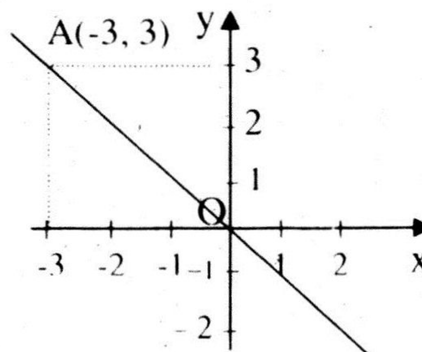
c. Điểm A thuộc trục góc phần tư thứ I.

d. Điểm A thuộc trục góc phần tư thứ II.

e. Điểm A thuộc trục góc phần tư thứ III.

f. Điểm A thuộc trục góc phần tư thứ IV.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ



Bài tập 1.

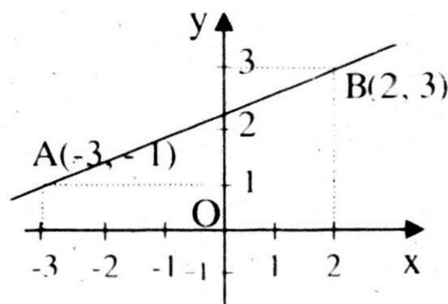
a. Từ hìmh vẽ ta nhận được $y_A = 3$.

b. Với mọi điểm $M(x_M, y_M)$ thuộc đường phân giác đã cho, ta luôn có:

$$x_M = -y_M.$$

Bài tập 2. *Học sinh tự làm.*

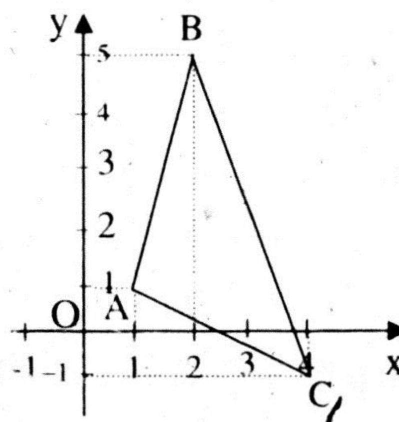
Bài tập 3.



a. Để vẽ đường thẳng AB với A(-3, -1) và B(2, 3), ta thực hiện như sau:

- Trên mặt phẳng toạ độ, xác định các điểm A(-3, -1) và B(2, 3).
- Nối hai điểm A và B, ta được đường thẳng AB.

Bài tập 4.



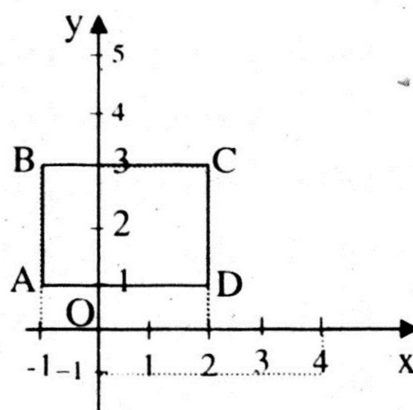
a. Để vẽ ΔABC với A(1, 1), B(2, 5) và C(4, -1) ta thực hiện như sau:

- Trên mặt phẳng toạ độ xác định các điểm A(1, 1), B(2, 5) và C(4, -1).
- Nối A và B, A và C, B và C, ta được ΔABC cần vẽ.

b. *Học sinh tự làm.*

c. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 5.



a. Để vẽ tứ giác ΔABC với A(- 1, 1), B(- 1, 3), C(2, 3) và D(2, 1), ta thực hiện như sau:

- Trên mặt phẳng toa dộ, xác định các điểm A(- 1, 1), B(- 1, 3), C(2, 3) và D(2, 1).
- Nối A và B, B và C, C và D, D và A, ta được tứ giác ABCD cần vẽ.

Dễ thấy ABCD là hình chữ nhật.

Bài tập 6. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 7.

a. Để điểm A thuộc trục Ox điều kiện là $y_A = 0$.

b. Để điểm A thuộc trục Oy điều kiện là $x_A = 0$.

c. Để điểm A thuộc trục góc phần tư thứ I điều kiện là x_A, $y_A > 0$.

d. Để điểm A thuộc trục góc phần tư thứ II điều kiện là $x_A < 0$ và $y_A > 0$.

e. Để điểm A thuộc trục góc phần tư thứ III điều kiện là x_A, $y_A < 0$.

f. Để điểm A thuộc trục góc phần tư thứ IV điều kiện là $x_A > 0$ và $y_A < 0$.

CHỦ ĐỀ 5 ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ y = ax, với a ≠ 0

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Ta có định nghĩa:

> *Đồ thị hàm số y = f(x) là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng (x, y) trên mặt phẳng toạ độ.*

2. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax$, $(a \neq 0)$

Trước tiên, chúng ta cần biết đến kết quả:

> *Đồ thị hàm số $y = ax$ $(a \neq 0)$ là một đường thẳng đi qua gốc độ.*

Như vậy, để vẽ đồ thị hàm số $y = ax$ $(a \neq 0)$, ta thực hiện:

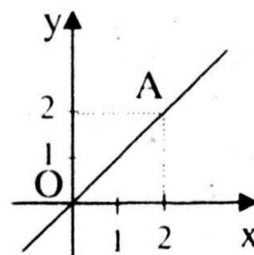
- Xác định thêm một điểm $A(x_A, ax_A)$ với $x_A \neq 0$.
- Nối O với A ta được đồ thị hàm số $y = ax$.

Thí dụ : Vẽ đồ thị hàm số $y = x$.

Giải

Để vẽ đồ thị hàm số $y = x$, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm A(2, 2).
- Nối O với A ta được đồ thị hàm số $y = x$.



Nhận xét: 1. Đồ thị hàm số $y = x$ chính là đường phân giác của góc phần tư thứ I, III.

2. Đồ thị hàm số $y = -x$ chính là đường phân giác của góc phần tư thứ II, IV.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ Oxy đồ thị của các hàm số:

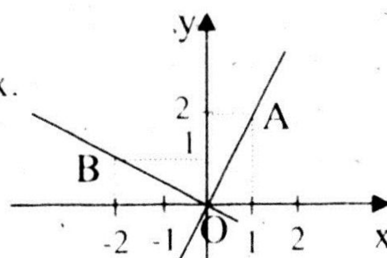
$$y = 2x \text{ và } y = -\frac{1}{2}x.$$

Có nhận xét gì về đồ thị của hai hàm số này ?

Giải

Để vẽ đồ thị hàm số y = 2x, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm A(1, 2).
- Nối O với A ta được đồ thị hàm số y = 2x.



Để vẽ đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x$, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm B(- 2, 1).
- Nối O với B ta được đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x$.

Nhận xét rằng, đồ thị của hai hàm số này vuông góc với nhau.

Ví dụ 2: Vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ Oxy đồ thị của các hàm số:

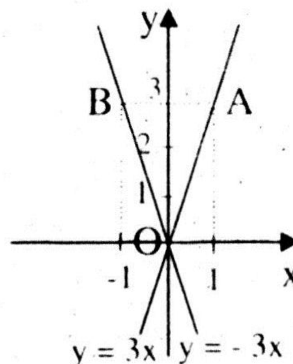
y = 3x và y = -3x.

Có nhận xét gì về đồ thị của hai hàm số này ?

Giải

Để vẽ đồ thị hàm số y = 3x, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm A(1, 3).
- Nối O với A ta được đồ thị hàm số y = 3x.



Để vẽ đồ thị hàm số y = -3x, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm B(- 1, 3).
- Nối O với B ta được đồ thị hàm số y = - 3x.

Nhận xét rằng, đồ thị của hai hàm số này đối xứng với nhau qua Oy.

Nhận xét: 1. Ta biết rằng:

$$|3x| = \begin{cases} 3x & \text{khi } x \geq 0 \\ -3x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Do đó, nếu lấy hai phần đồ thị là:

- Phần đồ thị của hàm số y = 3x trong góc phần tư thứ I.
- Phần đồ thị của hàm số y = - 3x trong góc phần tư thứ II.

ta nhận được đồ thị của hàm số $y = |3x|$.

2. Từ đó, để vẽ đồ thị hàm số $y = |ax|$ ta thực hiện như sau:

- Vẽ tia OA, với $A(x_A, ax_A)$, $x_A > 0$.
- Vẽ tia OB, với $B(-x_A, ax_A)$.

hoặc chỉ cần vẽ tia OA sau đó lấy đối xứng OA qua Oy.

Ví dụ 3: Cho hàm số y = ax. Hãy xác định hệ số a, biết:

a. Đồ thị hàm số đi qua điểm A(3, 2).

b. Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ II, IV.

Giải

a. Vì điểm A(3, 2) thuộc đồ thị hàm số nên:

$$2 = a.3 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}.$$

Vậy hàm số có dạng $y = \frac{2}{3}x$.

b. Đồ thi hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ II, IV, ta có ngay a = - 1.

Ví dụ 4: Đồ thị của hàm số y = ax nằm ở những góc phần tư nào của mặt phẳng toạ độ Oxy, nếu:

a. a > 0.

b. a < 0.

Giải

a. Với a > 0, ta có nhận xét rằng với điểm $A(x_A, y_A)$ thuộc đồ thị thì:

$y_A = ax_A \Rightarrow x_A$ và y_A cùng dấu

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ I, III.

b. Với a < 0, ta có nhận xét rằng với điểm $A(x_A, y_A)$ thuộc đồ thị thì:

$y_A = ax_A \Rightarrow x_A$ và y_A trái dấu

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ II, IV.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa đồ thị hàm số.

Câu hỏi 2: Đồ thị của hàm số y = ax ($a \neq 0$) được xác định như thế nào ?

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Vẽ đồ thị các hàm số:

a. y = 2x.

b. y = 81x.

c. y = - x.

d. y = - 3x.

e. $y = -\frac{1}{2}x$.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = ax$. Hãy xác định hệ số a, biết:

a. Đồ thị hàm số đi qua điểm A(1, 8).

b. Đồ thị hàm số đi qua điểm B($\frac{3}{4}$, - 3).

c. Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ I, III.

Vẽ đồ thị của hàm số trong mỗi trường hợp.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = (2a - 3)x$. Hãy xác định a, biết:

a. Đồ thị hàm số đi qua điểm A(2, 3).

b. Đồ thị hàm số đi qua điểm B($\frac{5}{4}$, - $\frac{1}{2}$).

c. Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ II, IV.

Vẽ đồ thị của hàm số trong mỗi trường hợp.

Bài tập 4. Cho hàm số $y = |a - 1|x$. Hãy xác định a, biết:

a. Đồ thị hàm số đi qua điểm A(1, 3).

b. Đồ thị hàm số đi qua điểm B(- $\frac{1}{2}$, 8).

Vẽ đồ thị của hàm số trong mỗi trường hợp.

Bài tập 5. Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a. $y = |x|$.

b. $y = |2x|$.

c. $y = \left|\frac{3}{4}x\right|$.

d. $y = \left|-\frac{x}{2}\right|$.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Lấy thêm điểm A(1, 2) — *Học sinh tự vẽ hình.*

b. Lấy thêm điểm A(1, 81) — *Học sinh tự vẽ hình với lưu ý tỉ lệ về đơn vị dài trên hai trục.*

c. Lấy thêm điểm A(- 2, - 2) — *Học sinh tự vẽ hình.*

d. Lấy thêm điểm A(1, - 2) — *Học sinh tự vẽ hình.*

Lấy thêm điểm A(2, - 1) — *Học sinh tự vẽ hình.*

Bài tập 2.

a. Vì điểm A(1, 8) thuộc đồ thị hàm số nên:

$$8 = a.1 \Leftrightarrow a = 8.$$

Vậy hàm số có dạng y = 8x.

Học sinh tự vẽ hình.

b. Vì điểm B($\frac{3}{4}$, - 3) thuộc đồ thị hàm số nên:

$$-3 = a.\frac{3}{4} \Leftrightarrow a = -4.$$

Vậy hàm số có dạng y = - 4x.

Học sinh tự vẽ hình.

c. Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ I, III, ta có ngay a = 1.

Bài tập 3.

a. Vì điểm A(2, 3) thuộc đồ thị hàm số nên:

$$3 = (2a - 3)2 \Leftrightarrow 4a = 9 \Leftrightarrow a = \frac{9}{4}.$$

Vậy hàm số có dạng $y = \frac{3}{2}x$.

Học sinh tự vẽ hình.

b. Vì điểm B($\frac{5}{4}$, $-\frac{1}{2}$) thuộc đồ thị hàm số nên:

$$-\frac{1}{2} = (2a - 3).\frac{5}{4} \Leftrightarrow 10a = 13 \Leftrightarrow a = \frac{13}{10}.$$

Vậy hàm số có dạng $y = -\frac{2}{5}x$.

Học sinh tự vẽ hình.

c. Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ II, IV, ta có:

$$2a - 3 = -1 \Leftrightarrow 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1.$$

Vậy hàm số có dạng y = - x.

Học sinh tự vẽ hình.

Bài tập 4.

a. Vì điểm A(1, 3) thuộc đồ thị hàm số nên:

$$3 = |a - 1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - 1 = 3 \\ a - 1 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = -2 \end{array}\right.$$

Vậy hàm số có dạng y = 3x.

Học sinh tự vẽ hình.

b. Vì điểm $B(-\frac{1}{2}, 8)$ thuộc đồ thị hàm số nên:

$$8 = |a - 1|.(-\frac{1}{2})$$ vô nghiệm.

Vậy, không tồn tại a.

CHỦ ĐỀ 6

ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = \frac{a}{x}$, với $a \neq 0$

I. PHƯƠNG PHÁP VẼ ĐỒ THỊ

Trong phạm vi kiến thức lớp 7, để có được đồ thị hàm số:

$$y = \frac{a}{x},$$

chúng ta thực hiện như sau:

1. Lập bảng để chỉ ra một số cặp số tương ứng của hàm số này, thông thường bảng có dạng:

x	$-x_3$	$-x_2$	$-x_1$	x_1	x_2	x_3
$y = \frac{a}{x}$	$-\frac{a}{x_3}$	$-\frac{a}{x_2}$	$-\frac{a}{x_1}$	$\frac{a}{x_1}$	$\frac{a}{x_2}$	$\frac{a}{x_3}$

2. Vẽ các điểm:

$$A(x_3, \frac{a}{x_3}), B(x_2, \frac{a}{x_2}), C(x_1, \frac{a}{x_1}),$$

$$A'(-x_3, -\frac{a}{x_3}), B'(-x_2, -\frac{a}{x_2}), C'(x_1, -\frac{a}{x_1}).$$

3. Cuối cùng:
   - Nối các điểm A, B, C theo một đường cong.
   - Nối các điểm A', B', C' theo một đường cong.

Hai đường cong này hợp thành đồ thị của hàm số $y = \frac{a}{x}$.

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = \frac{a}{x}$ gồm hai nhánh, hơn nữa:

- Nếu $a > 0$ thì nhánh thứ nhất thuộc góc phần tư thứ I và nhánh thứ hai thuộc góc phần tư thứ III.
- Nếu $a < 0$ thì nhánh thứ nhất thuộc góc phần tư thứ II và nhánh thứ hai thuộc góc phần tư thứ IV.

II VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Vẽ đồ thị hàm số:

$$y = \frac{6}{x}.$$

Giải

Trước tiên, ta đi lập bảng để chỉ ra một số cặp số tương ứng của hàm số này:

x	- 3	- 2	- 1	1	2	3
$y = \frac{6}{x}$	- 2	- 3	- 6	6	3	2

Tiếp đến, ta xác định vị trí của các điểm:

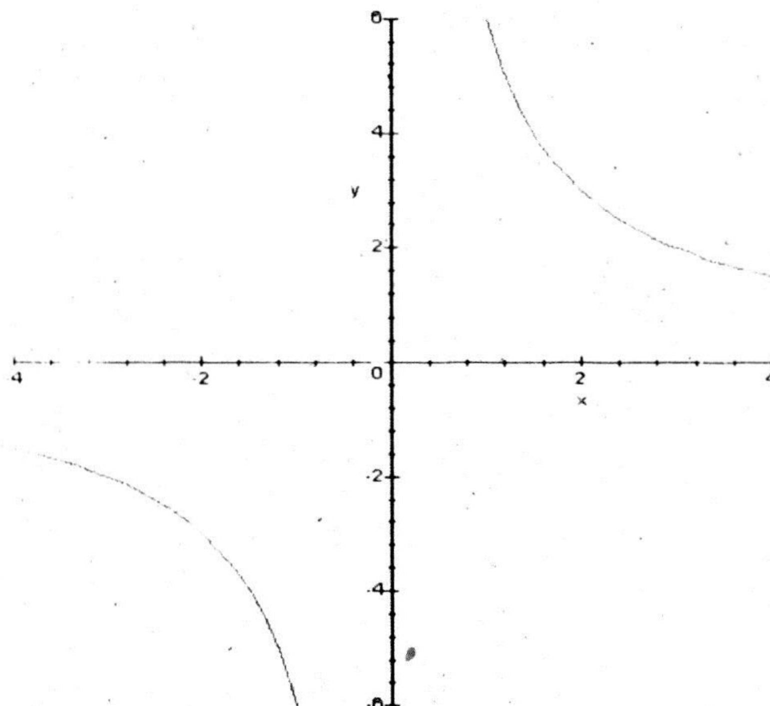
A(1, 6), B(2, 3), C(3, 2),

A'(- 1, - 6), B'(- 2, - 3), C'(- 3, - 2),

Cuối cùng:

- Nối các điểm A, B, C theo một đường cong.
- Nối các điểm A', B', C' theo một đường cong.

Hai đường cong này hợp thành đồ thị của hàm số $y = \frac{6}{x}$.



Ví dụ 2: Vẽ đồ thị hàm số:

$$y = -\frac{1}{8x}.$$

Giải

Trước tiên, ta đi lập bảng để chỉ ra một số cặp số tương ứng của hàm số này:

x	- 4	- 2	- 1	1	2	4
$y = -\frac{1}{8x}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$

Tiếp đến, ta xác định vị trí của các điểm:

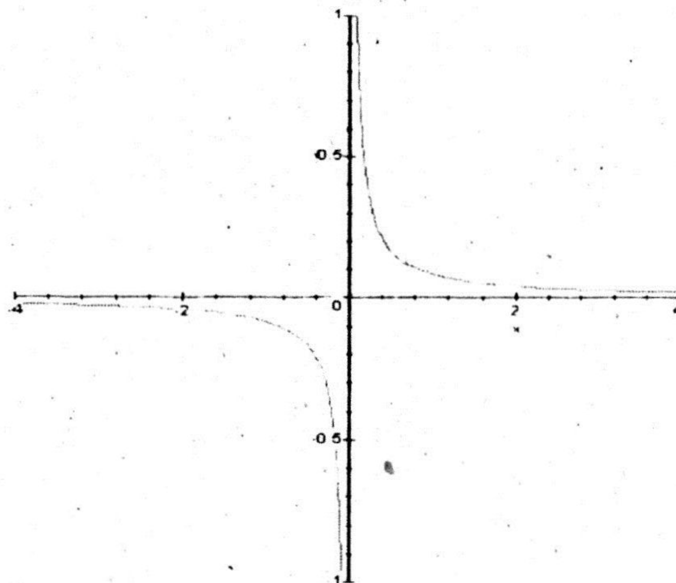
$A(1, -\frac{1}{8})$, $B(2, -\frac{1}{16})$, $C(4, -\frac{1}{32})$,

$A(-1, \frac{1}{8})$, $B(-2, \frac{1}{16})$, $C(-4, \frac{1}{32})$,

Cuối cùng:

- Nối các điểm A, B, C theo một đường cong.
- Nối các điểm A', B', C' theo một đường cong.

Hai đường cong này hợp thành đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{8x}$.



III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a. $y = \frac{1}{x}$.

b. $y = \frac{3}{x}$.

c. $y = \frac{1}{2x}$.

d. $y = -\frac{1}{x}$.

e. $y = -\frac{4}{x}$.

f. $y = -\frac{2}{3x}$.

Bài tập 2. Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a. $y = \frac{2}{x-1}$.

b. $y = \frac{1}{x+2}$.

c. $y = -\frac{1}{x+1}$.

d. $y = -\frac{4}{x-3}$.

e. $y = -\frac{1}{2x-1}$.

f. $y = \frac{1}{2x-4}$.

Phần 2
Hình học

CHƯƠNG I - ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Trong chương này, chúng ta sẽ thu nhận được kiến thức về:

1. **Hai góc đối đỉnh**
2. **Hai đường thẳng vuông góc**
3. **Các góc tạo bởi một đường thẳng cắt hai đường thẳng**
4. **Hai đường thẳng song song**
5. **Tiên đề Ơ - clit về đường thẳng song song**
6. **Từ vuông góc đến song song**

CHỦ ĐỀ 1

HAI GÓC ĐỐI ĐỈNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

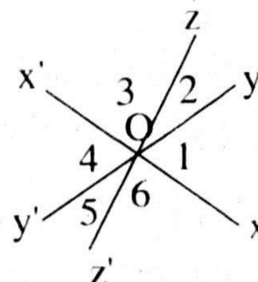
1. THẾ NÀO LÀ HAI GÓC ĐỐI ĐỈNH ?

Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia.

Thí dụ 1: Cho ba đường thẳng xx', yy', zz' đồng quy tại O. Hãy viết tên các cặp góc đối đỉnh.

Giải

Từ hình vẽ ta nhận thấy ngay các cặp góc đối đỉnh bằng nhau , bao gồm:



$\hat{O}_1$ và $\hat{O}_4$,

$\hat{O}_2$ và $\hat{O}_5$,

$\hat{O}_3$ và $\hat{O}_6$.

$x\hat{O}z$ và $x'\hat{O}z'$,

$y\hat{O}x'$ và $y'\hat{O}x$,

$z\hat{O}y'$ và $z'\hat{O}y$.

Vậy, theo giả thiết ta nhận được 6 cặp góc đối đỉnh.

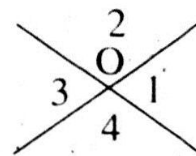
2. TÍNH CHẤT CỦA HAI GÓC ĐỐI ĐỈNH

Ta luôn có tính chất:

Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

Chứng minh

Nhận xét rằng:



$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^0$, vì là hai góc kề bù.

$\hat{O}_1 + \hat{O}_4 = 180^0$, vì là hai góc kề bù.

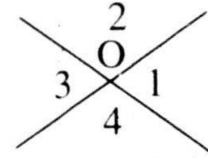
Suy ra:

$\hat{O}_2 = \hat{O}_4$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $\hat{O}_1 = \hat{O}_3$.

Thí dụ 2: Vẽ hai đường thẳng cắt nhau sao cho trong các góc tạo thành có một góc 80^0. Tính số đo các góc còn lại.

Giải



Giả sử hai đường thẳng cắt nhau tại O và $\hat{O}_1 = 80^0$.

Ta có:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = 80^0$, vì chúng là hai góc đối đỉnh.

$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^0 \Rightarrow O_4 = \hat{O}_2 = 180^0 - \hat{O}_1 = 180^0 — 80^0 = 100^0$.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

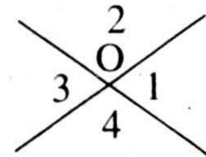
Ví dụ 1: Vẽ hai đường thẳng cắt nhau sao cho trong các góc tạo thành có một cặp góc đối đỉnh có tổng số đo bằng 130^0. Tính số đo của mỗi góc.

Giải

Theo giả thiết, ta có thể giả sử hai đường thẳng cắt nhau tại O và

$\hat{O}_1 + \hat{O}_3 = 130^0$.

Khi đó:



$\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = \frac{130^0}{2} = 65^0$.

$\hat{O}_2 = \hat{O}_4 = 180^0 - 65^0 = 115^0$.

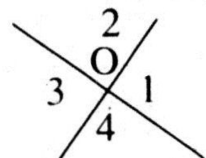
Nhận xét: Qua ví dụ trên cùng với thí dụ 2, chúng ta có thể khẳng định được rằng:

Hai đường thẳng cắt nhau tạo thành 4 góc, ta có thể tính được số đo của các góc nếu biết:

a. Số đo của 1 trong 4 góc đó.
b. Tổng số đo của một cặp góc đối đỉnh.
c. Tổng số đo của 3 trong 4 góc đó.
d. Hiệu số đo của hai góc kề bù.
e. Tỉ số số đo của hai góc kề bù.

Ví dụ 2: Vẽ hai đường thẳng cắt nhau sao cho trong các góc tạo thành có một góc 90^0. Chứng tỏ rằng số đo các góc còn lại đều bằng nhau.

Giải



Giả sử hai đường thẳng cắt nhau tại O và $\hat{O}_1 = 90^0$.

Ta có:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = 90^0$, vì chúng là hai góc đối đỉnh.

$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^0 \Rightarrow O_4 = \hat{O}_2 = 180^0 - \hat{O}_1 = 180^0 — 90^0 = 90^0$.

Vậy, ta được $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = \hat{O}_4 = 90^0$.

Nhân xét: Như vậy, nếu hai đường thẳng cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc vuông thì các góc còn lại cũng vuông - *Trường hợp này chúng ta sẽ xem xét kỹ hơn trong chủ đề hai đường thẳng vuông góc.*

Ví dụ 3: Hãy thực hiện các công việc sau:

a. Vẽ góc $x\hat{O}y = 60^0$.

b. Vẽ góc $x'\hat{O}y'$ đối đỉnh với góc $x\hat{O}y$.

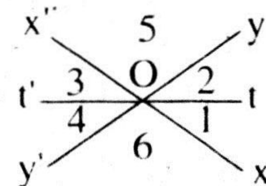
c. Vẽ tia phân giác Ot của góc $x\hat{O}y$.

d. Vẽ tia đối Ot' của tia Ot. Giải thích tại sao Ot' là tia phân giác của góc $x'\hat{O}y'$.

e. Viết tên sáu cặp góc đối đỉnh và tính số đo của chúng.

Giải

Công việc của các yêu cầu a), b), c) được mô tả trên hình vẽ.



d. Từ hình vẽ ta thấy:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_3$, vì đối đỉnh.

$\hat{O}_2 = \hat{O}_4$, vì đối đỉnh.

Mặt khác, vì Ot là tia phân giác của góc $x\hat{O}y$ nên:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \hat{O}_3 = \hat{O}_4 \Leftrightarrow$ Ot' là tia phân giác của góc $x'\hat{O}y'$.

e. Năm cặp góc đối đỉnh, gồm có:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = 30^0$,

$\hat{O}_2 = \hat{O}_4 = 30^0$,

$\hat{O}_5 = \hat{O}_6 = 180^0 - 60^0 = 120^0$,

$x\hat{O}y = x'\hat{O}y' = 60^0$,

$t\hat{O}x' = t'\hat{O}x = 30^0 + 120^0 = 150^0$,

$y\hat{O}t' = y'\hat{O}t = 30^0 + 120^0 = 150^0$.

Nhân xét: Trong ví trên chúng ta đã chứng minh được kết quả:

" *Chứng minh rằng hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh là hai tia đối nhau* "

Kết quả này thường sử dụng để:

1. Chứng minh hai tia đối nhau.
2. Chứng minh ba điểm thẳng hàng.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Thế nào là hai góc đối đỉnh ?

Câu hỏi 2: Nêu tính chất của hai góc đối đỉnh.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Vẽ hai đường thẳng cắt nhau rồi đặt tên cho các góc tạo thành.

a. Viết tên các cặp góc đối đỉnh.

b. Viết tên các góc bằng nhau.

Bài tập 2. Vẽ bốn đường thẳng cắt nhau tại O rồi đặt tên cho các góc tạo thành.

a. Viết tên các cặp góc đối đỉnh.

b. Viết tên các góc bằng nhau.

Bài tập 3. Nếu có n đường thẳng cắt nhau tại một điểm thì chúng tạo thành bao nhiêu cặp góc đối đỉnh.

Bài tập 4. Vẽ hai đường thẳng cắt nhau sao cho trong các góc tạo thành có một góc 68^0. Tính số đo các góc còn lại.

Bài tập 5. Hãy thực hiện các công việc sau:

a. Vẽ góc $x\hat{O}y = 80^0$.

b. Vẽ góc $x'\hat{O}y'$ đối đỉnh với góc $x\hat{O}y$.

c. Vẽ tia phân giác Ot của góc $x\hat{O}y$.

d. Vẽ tia đối Ot' của tia Ot. Giải thích tại sao Ot' là tia phân giác của góc $x'\hat{O}y'$.

e. Viết tên sáu cặp góc đối đỉnh và tính số đo của chúng.

Bài tập 6. Hai đường thẳng cắt nhau tạo thành 4 góc (như trong hình vẽ). Tính số đo của các góc còn lại nếu biết:

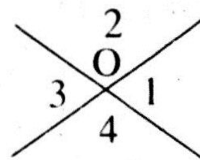
a. $\hat{O}_1 = 75^0$.

b. $\hat{O}_1 + \hat{O}_3 = 140^0$.

c. $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 240^0$.

d. $\hat{O}_2 - \hat{O}_1 = 30^0$.

e. $\hat{O}_2 = 2\hat{O}_1$.



Bài tập 7. Cho hai góc đối đỉnh. Vẽ một tia phân giác của một trong hai góc đó. Chứng minh rằng tia đối của tia này là tia phân giác của góc còn lại.

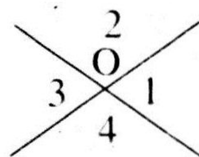
V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 2. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 3. n(n - 1).

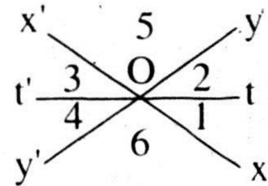
Bài tập 4. Với hình vẽ bên, ta nhận được:



$\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = 68^0$.

$\hat{O}_2 = \hat{O}_4 = 112^0$.

Bài tập 5. Công việc của các yêu cầu a), b), c) được mô tả trên hình vẽ.



d. Từ hình vẽ ta thấy:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_3$, vì đối đỉnh.

$\hat{O}_2 = \hat{O}_4$, vì đối đỉnh.

Mặt khác, vì Ot là tia phân giác của góc $x\hat{O}y$ nên:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \hat{O}_3 = \hat{O}_4 \Leftrightarrow$ Ot' là tia phân giác của góc $x'\hat{O}y'$.

e. Năm cặp góc đối đỉnh, gồm có:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = 40^0$,

$\hat{O}_2 = \hat{O}_4 = 40^0$,

$\hat{O}_5 = \hat{O}_6 = 180^0 - 80^0 = 100^0$,

$x\hat{O}y = x'\hat{O}y' = 80^0$,

$t\hat{O}x' = t'\hat{O}x = 40^0 + 100^0 = 140^0$,

$y\hat{O}t' = y'\hat{O}t = 40^0 + 100^0 = 140^0$.

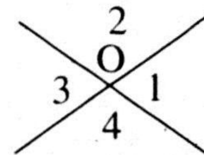
Bài tập 6.

a. Ta có:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = 75^0$, vì chúng là hai góc đối đỉnh.

$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^0 \Rightarrow O_4 = \hat{O}_2 = 180^0 - \hat{O}_1 = 180^0 — 75^0 = 105^0$.

b. Ta có:



$\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = \dfrac{140^0}{2} = 70^0$.

$\hat{O}_2 = \hat{O}_4 = 180^0 - 70^0 = 110^0$.

c. Ta có:

$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 360^0$

$\Rightarrow \hat{O}_2 = \hat{O}_4 = 360^0 — (\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 360^0 - 240^0 = 120^0$.

$\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = 180^0 - 120^0 = 60^0$.

d. Ta có:

$\hat{O}_2 - \hat{O}_1 = 30^0 \Rightarrow \hat{O}_2 = 30^0 + \hat{O}_1$.

Mặt khác, ta cũng có:

$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^0 \Leftrightarrow O_1 + 30^0 + \hat{O}_1 = 180^0 \Leftrightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3 = 75^0$.

$\hat{O}_2 = \hat{O}_4 = 30^0 + \hat{O}_1 = 105^0$.

e. Ta có:

$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^0 \Leftrightarrow O_1 + 2\hat{O}_1 = 180^0 \Leftrightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3 = 60^0$.

$\hat{O}_4 = \hat{O}_2 = 2O_1 = 120^0$.

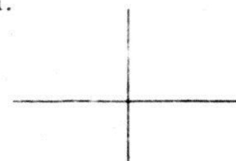
CHỦ ĐỀ 2 HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. THẾ NÀO LÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC ?

Trong chủ đề 1, chúng ta đã chứng minh được kết quả:

" *Nếu hai đường thẳng cắt nhau sao cho trong các góc tạo thành có một góc 90^0 thì các góc còn lại cũng có số đo bằng 90^0* "



trong trường hợp này, ta nói hai đường thẳng đó vuông góc với nhau.

Như vậy, ta có định nghĩa:

> *Hai đường thẳng a, b cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc vuông được gọi là* ***hai đường thẳng vuông góc*** *và được kí hiệu là* $a \perp b$.

Chú ý: Hai đường thẳng a, b vuông góc với nhau (và cắt nhau tại O) còn được gọi là:

" *Đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b (tại O)* "

hoặc " *Đường thẳng b vuông góc với đường thẳng a (tại O)* "

hoặc " *Hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau (tại O)* ".

Yêu cầu: Mỗi em học sinh hãy lấy một ví dụ thực tế về hai đường thẳng vuông góc với nhau.

2. VẼ HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Như vậy, chúng ta đã biết được thế nào là hai đường thẳng vuông góc, và từ đây một vấn đề nữa cần được giải quyết là " *Làm thế nào để vẽ được chính xác hai đường thẳng vuông góc với nhau* ". Để thực hiện điều này, trước hết chúng ta thừa nhận kết quả:

> *Qua một điểm chỉ kẻ được một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.*

Bây giờ chúng ta đi thực hiện bài toán sau:

> ***Bài toán***: **Cho một điểm O và một đường thẳng a. Hãy vẽ đường thẳng b đi qua O và vuông góc với đường thẳng a.**

Cách thực hiện

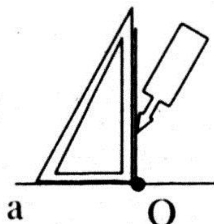
Ta xét hai trường hợp về vị trí của điểm O so với đường thẳng a.

Trường hợp 1: Nếu điểm O nằm trên đường thẳng a.

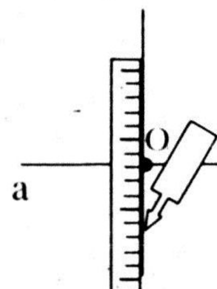
Cách vẽ đường thẳng b được minh hoạ qua các hình vẽ.



Hình dạng ban đầu



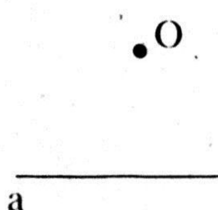
- Đặt êke với đỉnh góc vuông trùng với O và một cạnh góc vuông trùng với đường thẳng a.
- Dùng bút vạch một tia trên cạnh góc vuông còn lại.

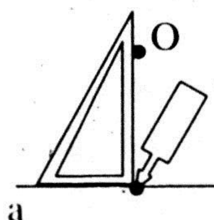


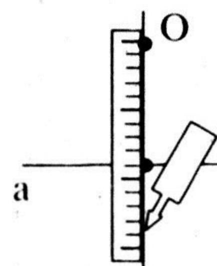
Đặt thước trùng với tia vừa vẽ rồi dùng bút kéo dài nó.

Trường hợp 2: Nếu điểm O nằm ngoài đường thẳng a.

Cách vẽ đường thẳng b được minh hoạ qua các hình vẽ.







Yêu cầu: Các em học sinh hãy phát biểu thành lời các bước thực hiện trên.

3. ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA ĐOẠN THẲNG

Ta có định nghĩa:

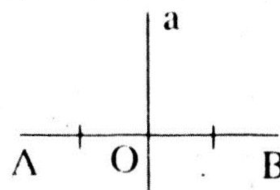
> *Đường thẳng vuông góc với một đoạn thẳng tại trung điểm của nó được gọi là* ***đường trung trực*** *của đoạn thẳng ấy.*

Chú ý: Khi a là đường trung trực của đoạn thẳng AB ta cũng nói " *Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng a* ".

Như vậy, để *dựng được đường trung trực của đoạn thẳng AB* cho trước, chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm O là trung điểm của AB.

Bước 2: Dựng đường thẳng qua O vuông góc với AB. Khi đó, đây chính là đường trung trực cần dựng.



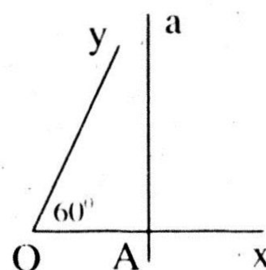
II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Vẽ hình theo cách diễn đạt " *Vẽ góc xÔy có số đo bằng 60^0. Lấy điểm A trên tia Ox rồi vẽ đường thẳng a vuông góc với tia Ox tại A. Lấy điểm B trên đường thẳng a rồi vẽ đường thẳng b vuông góc với Oy. Gọi C là giao điểm của a và b* ".

Giải

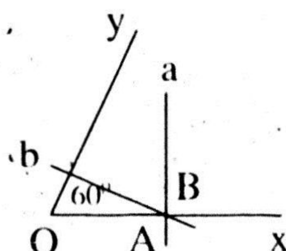
Thực hiện:

- Vẽ góc xÔy = 60^0, sau đó lấy điểm A trên tia Ox.
- Sử dụng phương pháp trong bài toán với trường hợp 1, ta dựng được đường thẳng a đi qua A và vuông góc với Ox.

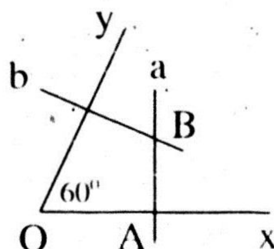


- Lấy điểm B trên đường thẳng a, khi đó ta có thể có các trường hợp sau:

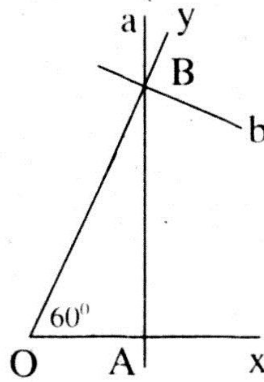
Trường hợp 1: Lấy điểm B trùng với điểm A, ta được hình vẽ:



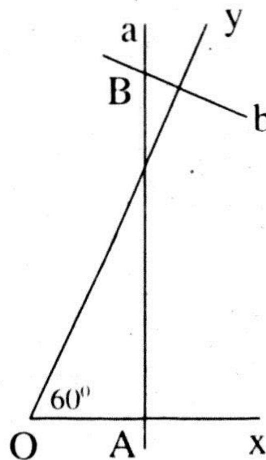
Trường hợp 2: Lấy điểm B nằm trong góc xÔy, ta được hình vẽ:

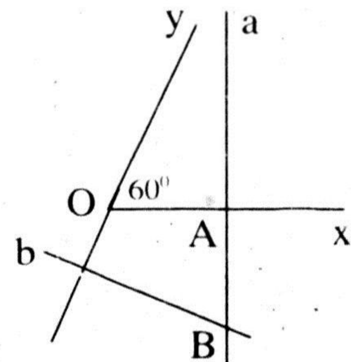


Trường hợp 3: Lấy điểm B là giao điểm của a với Oy, ta được hình vẽ:



Trường hợp 4: Lấy điểm B nằm ngoài góc xÔy (có hai khả năng), ta được hình vẽ:



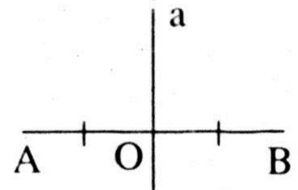


Ví dụ 2: Cho đoạn thẳng AB = 12cm. Hãy trình bày cách vẽ đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Giải

Thực hiện:

- Lấy điểm O là trung điểm của AB (O nằm giữa A, B và OA = 6cm).
- Dựng đường thẳng a qua O vuông góc với AB (*Sử dụng phương pháp trong bài toán với trường hợp 1*).



Khi đó, a chính là đường trung trực của đoạn AB.

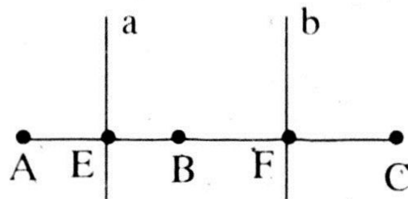
Ví dụ 3: Vẽ hình theo cách diễn đạt " *Vẽ đoạn thẳng AB = 4cm và đoạn thẳng BC = 6cm rồi vẽ đường trung trực của mỗi đoạn AB và BC* ".

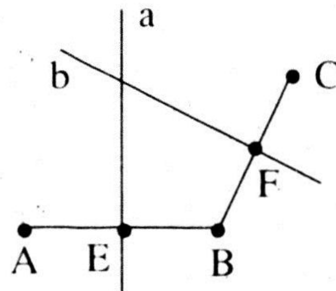
Giải

Thực hiện:

- Vẽ đoạn thẳng AB = 4cm. Lấy điểm E là trung điểm của AB (E nằm giữa A, B và EA = 2cm).
- Vẽ đoạn thẳng BC = 6cm. Lấy điểm F là trung điểm của AB (F nằm giữa B, C và FB = 3cm).
- Dựng đường thẳng a qua E vuông góc với AB (*Sử dụng phương pháp trong bài toán với trường hợp 1*).
- Dựng đường thẳng b qua F vuông góc với BC (*Sử dụng phương pháp trong bài toán với trường hợp 1*).

Với các bước làm như trên chúng ta có được hình cần vẽ, tuy nhiên ở đây chúng ta nhận được hai hình bởi A, B, C có thể thẳng hàng hoặc không thẳng hàng, cụ thể:





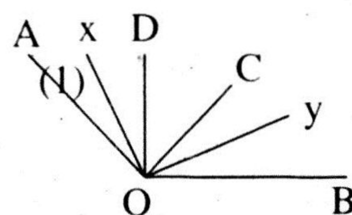
Ví dụ 4: Cho góc tù AÔB. Trong góc AÔB vẽ các tia OC ⊥ OA và OD ⊥ OB.

a. Chứng minh rằng AÔD = BÔC.

b. Chứng minh rằng AÔB + CÔD = 180^0.

c. Gọi Ox, Oy theo thứ tự là tia phân giác của các góc AÔD và BÔC. Chứng minh rằng Ox ⊥ Oy.

Giải



a. Vì các tia OC và OD ở trong góc AÔB nên:

AÔD = AÔC — CÔD = 90^0 — CÔD. (1)

BÔC = BÔD — CÔD = 90^0 — CÔD. (2)

Từ (1), (2), suy ra:

90^0 — CÔD = 90^0 — CÔD ⇔ AÔD = BÔC, đpcm.

b. Ta có:

AÔB + CÔD = (AÔC + BÔC) + CÔD

= AÔC + BÔC + CÔD

= AÔC + BÔD

$= 90^0 + 90^0 = 180^0$, đpcm.

c. Từ giả thiết, ta có:

$A\hat{O}D = 2x\hat{O}D$.

$C\hat{O}y = \frac{1}{2}B\hat{O}C = \frac{1}{2}A\hat{O}D = x\hat{O}D$.

Mặt khác, ta lại có:

$x\hat{O}y = x\hat{O}D + D\hat{O}C + C\hat{O}y = 2x\hat{O}D + D\hat{O}C$

$= A\hat{O}D + D\hat{O}C = A\hat{O}C = 90^0$

$\Leftrightarrow Ox \perp Oy$, đpcm.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Thế nào là hai đường thẳng vuông góc ? Lấy ví dụ thực tế về hai đường thẳng vuông góc với nhau.

Câu hỏi 2: Có bao nhiêu đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước ?

Câu hỏi 3: Hãy trình bày cách vẽ đường thẳng b đi qua O và vuông góc với đường thẳng a cho trước.

Câu hỏi 4: Nêu định nghĩa đường trung trực của đoạn thẳng.

Câu hỏi 5: Nêu cách vẽ đường trung trực của đoạn thẳng AB cho trước.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho đoạn thẳng AB = 8cm. Hãy trình bày cách vẽ đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Bài tập 2. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CA.

a. Hãy trình bày cách vẽ các đường trung trực của các đoạn thẳng AB, BC, CA.

b. Có nhận xét gì về ba đường trung trực trên.

Bài tập 3. Cho hình chữ nhật ABCD.

a. Hãy trình bày cách vẽ các đường trung trực của các đoạn thẳng AB, CD. Có nhận xét gì về hai đường trung trực này.

b. Hãy trình bày cách vẽ các đường trung trực của các đoạn thẳng AD, BC. Có nhận xét gì về hai đường ttrung trực này.

c. Nhận xét gì về hai đường trung trực của AB và AD.

Bài tập 4. Vẽ hình theo cách diễn đạt " *Vẽ góc xÔy có số đo bằng 45^0. Lấy điểm A trên tia Ox rồi vẽ đường thẳng a vuông góc với tia Ox tại A. Lấy điểm B trên đường thẳng a rồi vẽ đường thẳng b vuông góc với Oy. Gọi C là giao điểm của a và b* ".

Bài tập 5. Vẽ hình theo cách diễn đạt " *Vẽ góc xÔy có số đo bằng 80^0. Lấy điểm A trên tia Ox rồi vẽ đường thẳng a vuông góc với tia Ox tại A. Lấy điểm B trên tia Oy rồi vẽ đường thẳng b vuông góc với Oy tại B. Gọi C là giao điểm của a và b* ".

Bài tập 6. Chứng minh rằng góc tạo bởi hai tia phân giác của hai góc kề bù là một góc vuông.

Bài tập 7. Cho góc xÔy và tia Oz nằm trong góc đó sao cho xÔz = 4yÔz. Tia phân giác Ot của góc xÔz thoả mãn Ot ⊥ Oy. Tính số đo của góc xÔy.

Bài tập 8. Cho góc xÔy = 90^0. Trong góc xÔy vẽ các tia OC, OD sao cho AÔC = BÔD = 60^0.

a. Tính số đo của các góc AÔD, DÔC, CÔB.

b. Trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng OA và chứa tia OB ta vẽ tia OE sao cho OB là phân gíc của góc DÔE. Chứng minh rằng OC ⊥ OE.

Bài tập 9. Cho góc tù AÔB. Trong góc AÔB vẽ các tia OC sao cho AÔC + AÔB = 180^0. Vẽ tia phân giác OD của góc BÔC.

a. BÔC + 2AÔC = 180^0.

b. Chứng minh rằng OA ⊥ OD.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 2. Ba đường trung trực đồng quy tại một điểm - *Điểm này được chính là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC*.

Bài tập 3.

a. Hai đường trung trực này trùng nhau.

b. Hai đường trung trực này trùng nhau.

c. Hai đường trung trực này vuông góc với nhau.

Bài tập 4. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 5. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 6. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 7. Ta có:

$x\hat{O}y = x\hat{O}z + y\hat{O}z = 4y\hat{O}z + y\hat{O}z = 5y\hat{O}z.$ (1)

Mặt khác ta lại có:

$y\hat{O}t = 90^0$

$\Leftrightarrow 90^0 = y\hat{O}z + z\hat{O}t = y\hat{O}z + \frac{1}{2}x\hat{O}z$

$= y\hat{O}z + \frac{1}{2}.4y\hat{O}z = 3y\hat{O}z$

$\Leftrightarrow y\hat{O}z = 30^0.$ (2)

Thay (2) vào (1), ta được:

$x\hat{O}y = 5.30^0 = 150^0.$

Vậy, ta tìm được $x\hat{O}y = 150^0$.

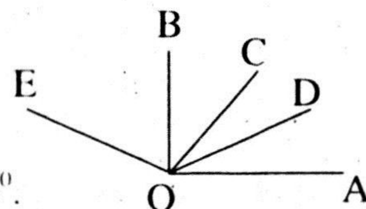
Bài tập 8.

a. Ta có ngay:

$A\hat{O}D = A\hat{O}B - B\hat{O}D = 90^0 - 60^0 = 30^0.$

$B\hat{O}C = A\hat{O}B - A\hat{O}C = 90^0 - 60^0 = 30^0.$

$C\hat{O}D = A\hat{O}C - A\hat{O}D = 60^0 - 30^0 = 30^0.$



b. Ta có ngay:

$C\hat{O}E = C\hat{O}B + B\hat{O}E = C\hat{O}B + B\hat{O}D = 30^0 + 60^0\ 90^0$

$\Leftrightarrow OC \perp OE$, đpcm.

CHỦ ĐỀ 3 — CÁC GÓC TẠO BỞI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CẮT HAI ĐƯỜNG THẲNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. GÓC SO LE TRONG – GÓC ĐỒNG VỊ

Chúng ta sẽ bắt đầu với giả thiết cho hai đường thẳng a và b. Vẽ đường thẳng c cắt cả a và b theo thứ tự tại A, B.

Khi đó:

- Tại giao điểm A ta có 4 góc là:

  $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{A}_4$.

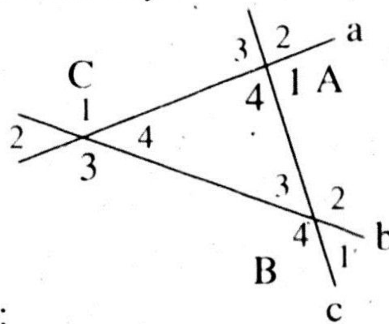
- Tại giao điểm B ta có 4 góc là:

  $\hat{B}_1, \hat{B}_2, \hat{B}_3, \hat{B}_4$.

Để thiết lập mối tương qua giữa các góc ở đỉnh A và các góc tại đỉnh B người ta sử dụng các định nghĩa:

- Các cặp góc $\hat{A}_1$ và $\hat{B}_1$, $\hat{A}_2$ và $\hat{B}_2$, $\hat{A}_3$ và $\hat{B}_3$, $\hat{A}_4$ và $\hat{B}_4$ được gọi là các cặp góc *đồng vị*.
- Các cặp góc $\hat{A}_1$ và $\hat{B}_3$, $\hat{A}_4$ và $\hat{B}_2$ được gọi là các cặp góc *so le trong*.
- Các cặp góc $\hat{A}_1$ và $\hat{B}_2$, $\hat{A}_4$ và $\hat{B}_3$ được gọi là các cặp góc *trong cùng phía*.

Thí dụ 1: Xem hình vẽ dưới đây rồi viết tên các cặp góc đồng vị, so le trong, trong cùng phía.



Giải

Ta xét ba trường hợp:

Trường hợp 1: Đường thẳng c cắt cả a và b theo thứ tự tại A, B. Khi đó:

- Các cặp góc $\hat{A}_1$ và $\hat{B}_1$, $\hat{A}_2$ và $\hat{B}_2$, $\hat{A}_3$ và $\hat{B}_3$, $\hat{A}_4$ và $\hat{B}_4$ được gọi là các cặp góc *đồng vị*.
- Các cặp góc $\hat{A}_1$ và $\hat{B}_3$, $\hat{A}_4$ và $\hat{B}_2$ được gọi là các cặp góc *so le trong*.
- Các cặp góc $\hat{A}_1$ và $\hat{B}_2$, $\hat{A}_4$ và $\hat{B}_3$ được gọi là các cặp góc *trong cùng phía*.

Trường hợp 2: Đường thẳng b cắt cả a và c theo thứ tự tại B, C.

Học sinh tự làm.

Trường hợp 3: Đường thẳng a cắt cả b và c theo thứ tự tại A, C.

Học sinh tự làm.

2. TÍNH CHẤT

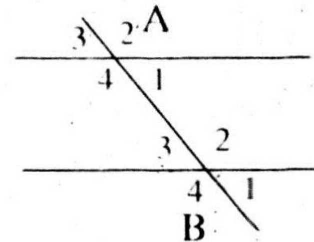
Để xây dựng tính chất của các góc so le trong và các góc đồng vị chúng ta hãy bắt đầu với thí dụ cụ thể sau:

Thí dụ 2: Trên hình vẽ bên, cho $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 30^0$:

a. Hãy tính $\hat{A}_2$ và $\hat{B}_2$.

b. Hãy tính $\hat{A}_3$ và $\hat{B}_3$.

c. Hãy so sánh $\hat{A}_1$ và $\hat{B}_3$.



Giải

a. Ta có:

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^0$$

$$\Leftrightarrow \hat{A}_2 = 180^0 - \hat{A}_1 = 180^0 - 45^0 = 135^0.$$

$$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^0$$

$$\Leftrightarrow \hat{B}_2 = 180^0 - \hat{B}_1 = 180^0 - 45^0 = 135^0.$$

Nhận thấy rằng $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$.

b. Ta có:

$\hat{A}_3 = \hat{A}_1 = 30^0$, vì chúng là hai góc đối đỉnh.

$\hat{B}_3 = \hat{B}_1 = 30^0$, vì chúng là hai góc đối đỉnh.

Nhận thấy rằng $\hat{A}_3 = \hat{B}_3$.

c. Ta có ngay $\hat{A}_1 = \hat{B}_3$.

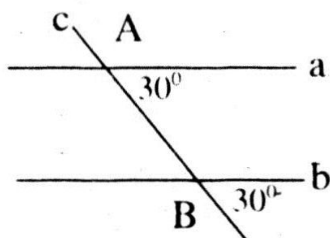
Nhận xét: Nếu chỉ sử dụng giả thiết $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ thì sự bằng nhau của các cặp góc trên vẫn đúng. Chính vì điều này chúng ta có được tính chất sau.

Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có:

1. *Một cặp góc đồng vị bằng nhau thì:*
   a. *Hai góc đồng vị bằng nhau.*
   b. *Hai góc so le trong bằng nhau.*
2. *Một cặp góc so le trong bằng nhau thì:*
   a. *Hai góc so le trong còn lại bằng nhau.*
   b. *Hai góc đồng vị bằng nhau.*

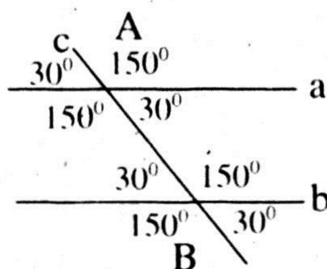
II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại:

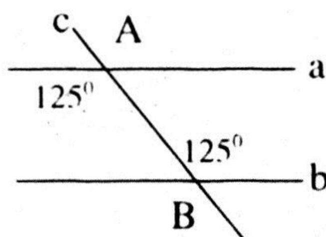


Giải

Từ hình vẽ nhận thấy rằng đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc đồng vị bằng nhau, do đó ta nhận được kết quả điền như sau:

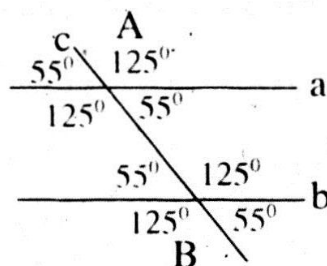


Ví dụ 2: Hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại:



Giải

Từ hình vẽ nhận thấy rằng đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau, do đó ta nhận được kết quả điền như sau:



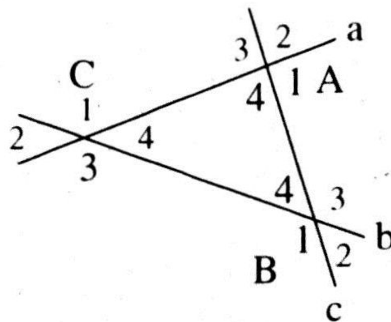
III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Vẽ đường thẳng c cắt hai đường thẳng a và b theo thứ tự tại A và B, từ đó chỉ ra các cặp góc so le trong và các cặp góc đồng vị.

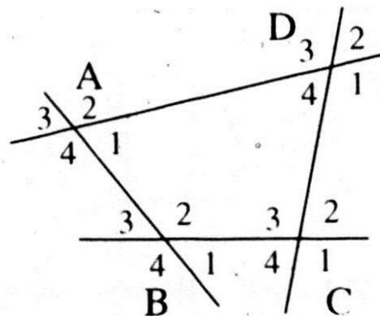
Câu hỏi 2: Phát biểu tính chất.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

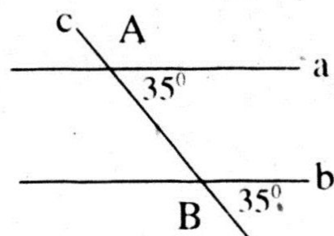
Bài tập 1. Xem hình vẽ dưới đây rồi viết tên các cặp góc đồng vị, so le trong, trong cùng phía.

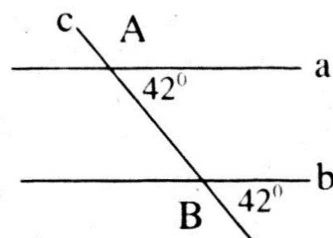


Bài tập 2. Xem hình vẽ dưới đây rồi viết tên các cặp góc đồng vị, so le trong, trong cùng phía.

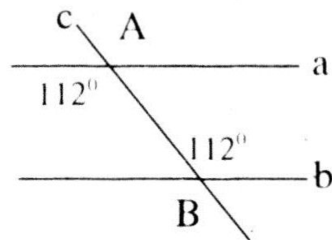


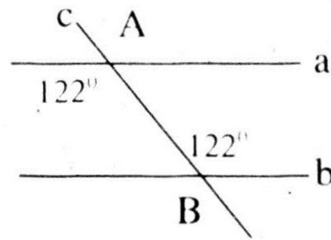
Bài tập 3. Hãy điền vào các hình sau số đo của các góc còn lại:



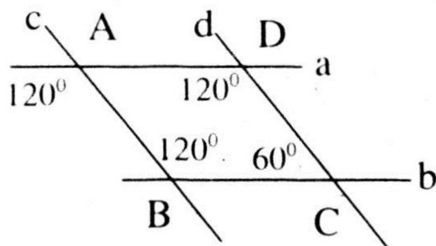


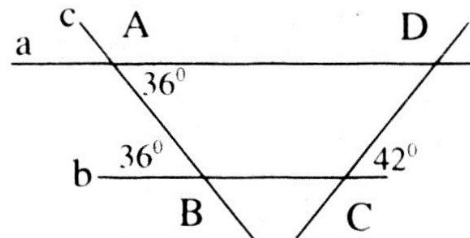
Bài tập 4. Hãy điền vào các hình sau số đo của các góc còn lại:





Bài tập 5. Hãy điền vào các hình sau số đo của các góc còn lại:

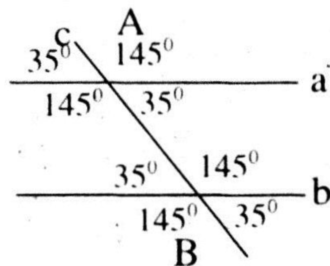


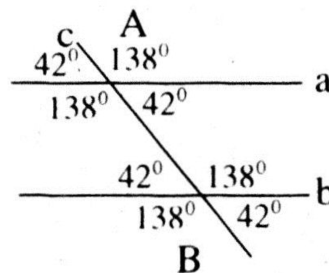


V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

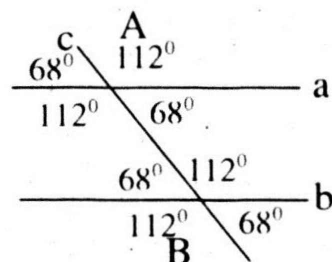
Bài tập 1. *Học sinh tự làm.*

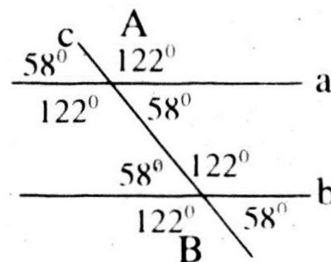
Bài tập 2. Ta được:



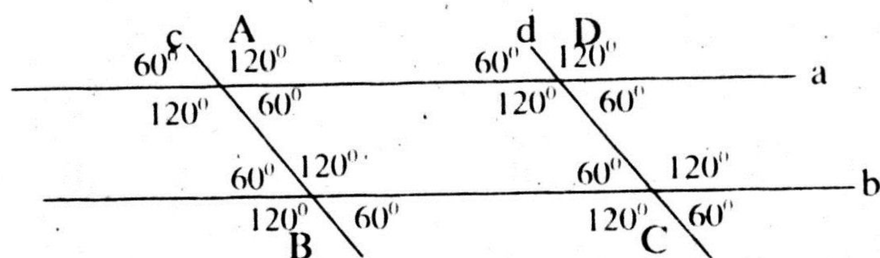


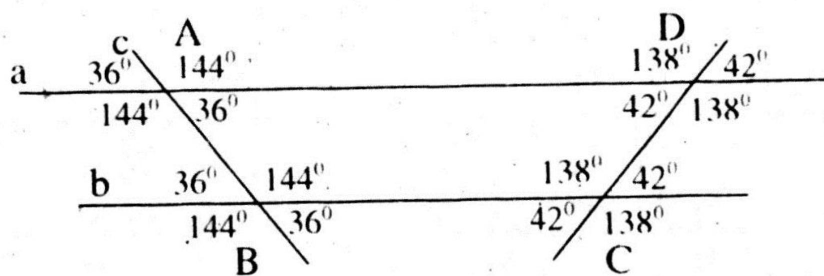
Bài tập 3. Ta được:





Bài tập 4. Ta được:





CHỦ ĐỀ 4

HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. NHẮC LẠI

Trong phần kiến thức hình học lớp 6, chúng ta đã được tiếp xúc với nội dung:

1. Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng không có điểm chung.
2. Hai đường thẳng phân biệt thì hoặc cắt nhau hoặc song song với nhau.

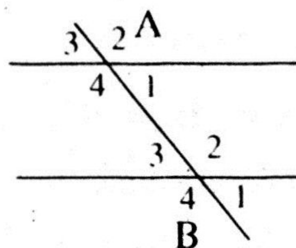
2. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Ta thừa nhận tính chất sau:

Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau (hoặc một cặp góc đồng vị bằng nhau) thì a và b song song với nhau.

Nhận xét: Như vậy, ta có hai đường thẳng a và b song song với nhau nếu một trong các điều kiện sau xảy ra:

1. $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$.
2. $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$.
3. $\hat{A}_3 = \hat{B}_3$.
4. $\hat{A}_4 = \hat{B}_4$.
5. $\hat{A}_1 = \hat{B}_3$.
6. $\hat{A}_4 = \hat{B}_2$.



Hai đường thẳng a và b song song với nhau thì:

- Kí hiệu a // b.
- Khi đó ta còn có thể nói:

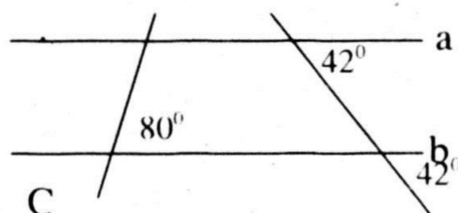
" *Đường thẳng a song song với đường thẳng b* "

hoặc " *Đường thẳng b song song với đường thẳng a* ".

Yêu cầu: Các em học sinh hãy chứng minh thêm dấu hiệu:

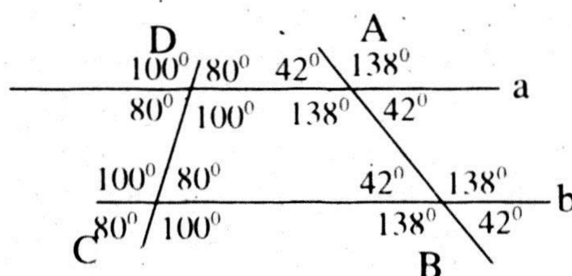
" Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc trong cùng phía bù nhau thì a và b song song với nhau. "

Thí dụ 1: Hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại:



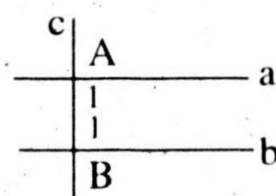
Giải

Từ hình vẽ ta thấy ngay a // b. nên ta nhận được kết quả điền như sau:



Thí dụ 2: Biết rằng hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với đường thẳng c. Chứng tỏ rằng a // b.

Giải



Theo giả thiết:

$a \perp c \Leftrightarrow \hat{A}_1 = 90^0$.

$b \perp c \Leftrightarrow \hat{B}_1 = 90^0$.

Khi đó, ta nhận được:

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 90^0 + 90^0 = 180^0$$

$\Leftrightarrow$ a // b, vì có hai góc trong cùng phía bù nhau.

3. VẼ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Như vậy, chúng ta đã biết được dấu hiệu để nhận biết hai đường thẳng song song với nhau, và từ đây một vấn đề nữa cần được giải quyết là " *Làm thế nào để vẽ được chính xác hai đường thẳng song song với nhau* ".

Để thực hiện điều nay, trước hết chúng ta thừa nhận kết quả (được gọi là "*Tiên đề Ơ - clit*"):

> *Qua một điểm O ở ngoài đường thẳng a chỉ kẻ được một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng a.*

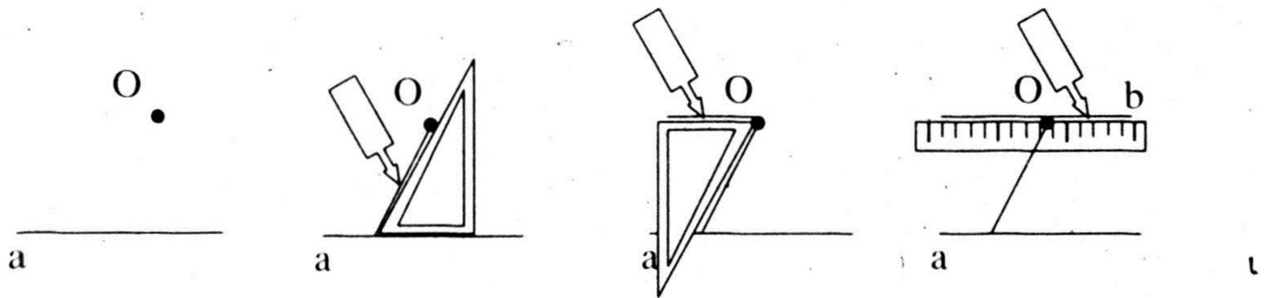
Bây giờ chúng ta đi thực hiện bài toán sau:

> **Bài toán**: Cho một điểm O và một đường thẳng a không đi qua O. Hãy vẽ đường thẳng b đi qua O và song song với đường thẳng a.

Cách thực hiện

Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

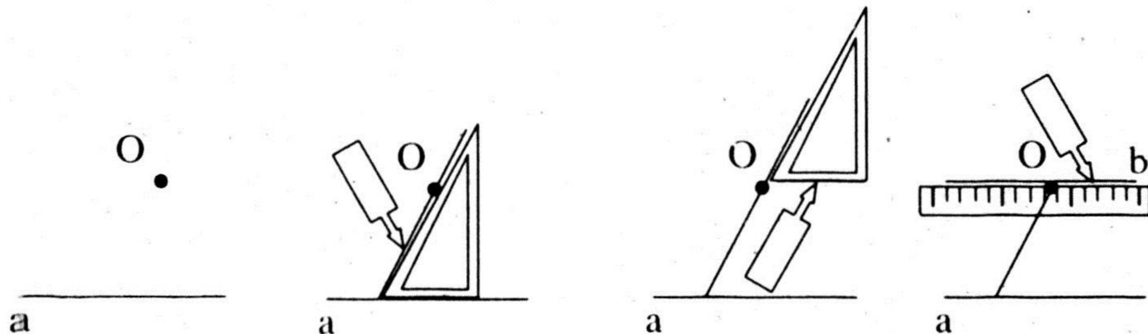
Cách 1: Cách vẽ đường thẳng b được minh hoạ qua các hình vẽ.



Hình dạng ban đầu	▪ Đặt êke với một cạnh góc vuông trùng với đường thẳng a và cạnh huyền đi qua O. ▪ Dùng bút vạch một tia trên cạnh huyền	▪ Đặt êke với cạnh huyền trùng với tia vừa vẽ và một đỉnh trùng với O. ▪ Dùng bút vạch một tia trên cạnh góc vuông.	Đặt thước trùng với tia vừa vẽ rồi dùng bút kéo dài nó.

Cách 2: Cách vẽ đường thẳng b được minh hoạ qua các hình vẽ.

Cách vẽ đường thẳng b được minh họa qua các hình vẽ.



Yêu cầu: Các em học sinh hãy phát biểu thành lời các bước thực hiên trên.

4. TÍNH CHẤT CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

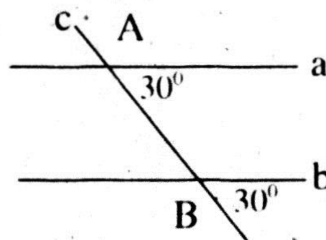
Với hai đường thẳng song song ta nhận được tính chất sau:

Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì:

1. *Hai góc so le trong bằng nhau.*
2. *Hai góc đồng vị bằng nhau.*
3. *Hai góc trong cùng phía bù nhau.*

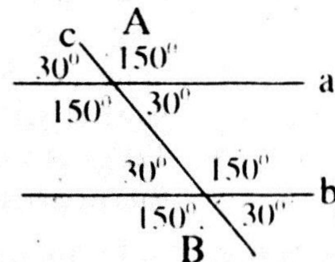
Chú ý:
1. Nếu a // b thì mỗi đoạn thẳng (mỗi tia) của đường thẳng a sẽ song song với mỗi đoạn (mỗi tia) của đường thẳng b.
2. Hai đoạn thẳng (hoặc hai tia) không có điểm chung thì chưa chắc song song với nhau.

Thí dụ 3: Biết a // b, hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại:



Giải

Vì a // b nên:



- Hai góc so le trong bằng nhau.
- Hai góc đồng vị bằng nhau.
- Hai góc trong cùng phía bù nhau.

ta nhận được kết quả điền như hình bên.

5. CẶP GÓC CÓ CẠNH TƯƠNG ỨNG SONG SONG

Chúng ta có kết quả sau:

Nếu hai góc có cạnh tương ứng song song thì chúng bằng nhau hoặc bù nhau, cụ thể:

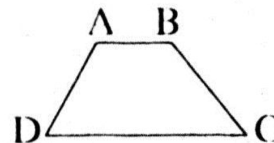
1. *Chúng bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù.*
2. *Chúng bù nhau nếu góc này nhọn và góc kia tù.*
3. *Nếu một góc vuông thì góc còn lại cũng vuông.*

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tính các góc của hình ABCD (AB // CD), biết $\hat{A} = 3\hat{D}$ và $\hat{B} - \hat{C} = 30^0$.

Giải

Vì ABCD là hình thang với AB // CD, ta có:



$180^0 = \hat{A} + \hat{D} = 3\hat{D} + \hat{D} = 4\hat{D}$

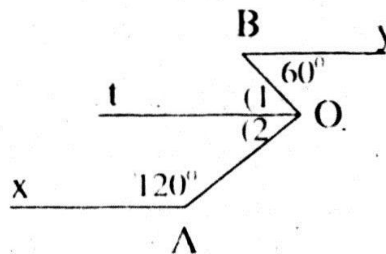
$\Leftrightarrow \hat{D} = 45^0 \Rightarrow \hat{A} = 135^0$.

$180^0 = \hat{B} + \hat{C} \overset{\hat{B} - \hat{C} = 30^0}{=} (30^0 + \hat{C}) + \hat{C} = 30^0 + 2\hat{C}$

$\Leftrightarrow \hat{C} = 75^0$

$\Rightarrow \hat{B} = 180^0 - \hat{C} = 105^0$.

Ví dụ 2: Trên hình vẽ bên, cho $A\hat{O}B = 120^0$ và Ot là tia phân giác của góc $A\hat{O}B$. Chứng minh rằng Ax // Ot và By // Ot.



Giải

Theo giả thiết, Ot là tia phân giác của góc $A\hat{O}B = 120^0$ nên:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 60^0$.

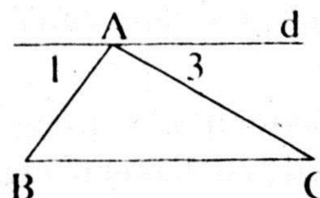
Nhận xét rằng:

- Vì $\hat{O}_1 = O\hat{B}y$ nên Ot // By bởi vì chúng có hai góc so le trong bằng nhau.
- Vì $\hat{O}_2 + O\hat{A}x = 180^0$ nên Ot // Ax bởi vì chúng có hai góc trong cùng phía bù nhau.

Ví dụ 3: Cho ΔABC. Tính tổng $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$.

Giải

Qua A kẻ đường thẳng d song song với BC, ta nhận thấy ngay:



- $\hat{B} = \hat{A}_1$, vì so le trong.
- $\hat{C} = \hat{A}_3$, vì so le trong.

Khi đó:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A} + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^0$.

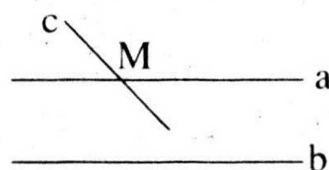
Nhận xét: 1. Trong thí dụ trên chúng ta đã sử dụng *phương pháp dựng thêm hình phụ* để thực hiện. Nếu biết cách vận dụng phương pháp này thì nhiều bài toán sẽ được giải quyết một cách khá đơn giản - Chúng ta sẽ còn gặp lại phương pháp này trong những chủ đề tiếp theo.

2. Qua ví dụ trên, chúng ta ghi nhận được một kết quả:

" *Tổng ba góc trong một tam giác luôn bằng* 180^0 ".

Ví dụ 4: Cho a // b chứng tỏ rằng nếu đường thẳng c cắt đường thẳng a thì cũng cắt đường thẳng b.

Giải



Giả sử đường thẳng c cắt đường thẳng a tại điểm M.

Giả sử trái lại c không cắt b, tức là:

c // b.

Khi đó " *Qua điểm M kẻ được hai đường thẳng phân biệt a và c song song với b* ", điều này mâu thuẫn với tiên đề Ơ - clit.

Vậy, c luôn cắt b.

Nhận xét: 1. Trong thí dụ trên chúng ta đã sử dụng *phương pháp chứng minh bằng phản* chứng để thực hiện. Lược đồ khi sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng để chứng minh tính chất K được minh hoạ theo các bước:

Bước 1: Giả sử trái lại tính chất K không đúng, khi đó ta có tính chất K'.

Bước 2: Khai thác tính chất K' dẫn tới điều mâu thuẫn.

Bước 3: Kết luận về tính chất K.

2. Qua ví dụ trên, chúng ta ghi nhận được một kết quả:

" *Nếu một đường thẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì nó cắt đường thẳng còn lại* ".

Ví dụ 5: Qua điểm A ở ngoài đường thẳng a vẽ n + 1 đường thẳng phân biệt. Chứng minh rằng ít nhất cũng có n đường thẳng cắt a.

Giải

Giả sử trái lại, trong số n + 1 đường thẳng phân biệt kẻ qua điểm A có chưa đến n đường thẳng cắt a.

Suy ra, còn lại ít nhất hai đường thẳng không cắt a.

Vậy, hai đường thẳng này sẽ cùng đi qua A và song song với a, điều này mâu thuẫn vì nó trái với tiên đề Ơ - clit.

Vậy, ít nhất cũng có n đường thẳng cắt a.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Thế nào là hai đường thẳng song song ?

Trong các câu trả lời sau, hãy chọn câu đúng:

a. Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng không có điểm chung.

b. Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau.

c. Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng không cắt nhau.

d. Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng không cắt nhau, không trùng nhau.

Câu hỏi 2: Thế nào là hai đoạn thẳng song song ?

Trong các câu trả lời sau, hãy chọn câu đúng:

a. Hai đoạn thẳng song song là hai đoạn thẳng không cắt nhau.

b. Hai đoạn thẳng song song là hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song.

Câu hỏi 3: Làm thế nào để nhận biết a // b ?

Trong các câu trả lời sau, hãy chọn câu đúng:

a. Nếu c cắt a và b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau thì a song song với b.

b. Nếu c cắt a và b và trong các góc tạo thành có một cặp góc đồng vị bằng nhau thì a song song với b.

c. Nếu c cắt a và b và trong các góc tạo thành có một cặp góc trong cùng phía bù nhau thì a song song với b.

Câu hỏi 4: Phát biểu tiên đề Ơ - clit.

Câu hỏi 5: Trong các phát biểu sau, phát biểu nào diễn đạt đúng nội dung của tiên đề Ơ - clit:

a. Nếu qua điểm M nằm ngoài đường thẳng a có hai đường thẳng song song với a thì chúng trùng nhau.

b. Cho điểm M ở ngoài đường thẳng a. Đường thẳng đi qua M và song song với đường thẳng a là duy nhất.

c. Có duy nhất một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước.

d. Qua điểm M nằm ngoài đường thẳng a có ít nhất một đường thẳng song song với a.

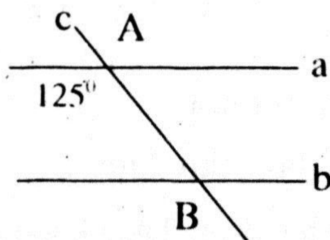
Câu hỏi 6: Hãy trình bày cách vẽ đường thẳng b đi qua O và song song với đường thẳng a cho trước, biết O không thuộc a.

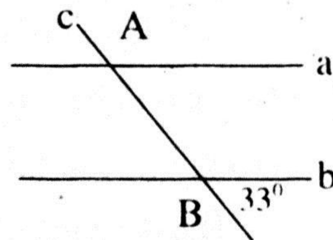
Câu hỏi 7: Phát biểu các tính chất của hai đường thẳng song song.

Câu hỏi 8: Hãy trình bày các bước khi sử dụng phương pháp chứng minh bằng phản chứng để giải toán.

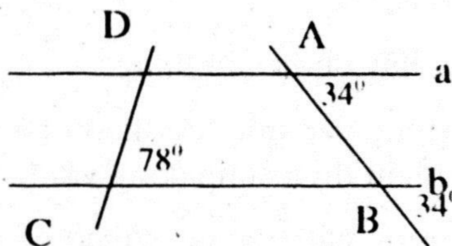
IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

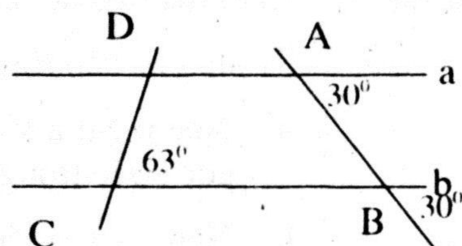
Bài tập 1. Biết a // b, hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại:





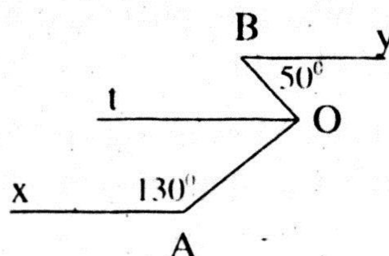
Bài tập 2. Hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại:





Bài tập 3. Cho hình ABCD (AB // CD). Tính các góc $\hat{B}$ và $\hat{D}$ biết $\hat{A} = 60^0$ và $\hat{C} = 130^0$.

Bài tập 4. Trên hình vẽ bên, cho $\widehat{AOB} = 100^0$ và Ot là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$. Chứng minh rằng Ax // Ot và By // Ot.



Bài tập 5. Cho hai góc $x\hat{O}y$ và $x'\hat{O}'y'$, biết Ox // O'x' (cùng chiều) và Oy // O'y' (cùng chiều). Chứng minh rằng $x\hat{O}y = x'\hat{O}'y'$.

Bài tập 6. Cho hai góc $x\hat{O}y$ và $x'\hat{O}'y'$, biết Ox // O'x' (cùng chiều) và Oy // O'y' (ngược chiều). Chứng minh rằng $x\hat{O}y + x'\hat{O}'y' = 180^0$.

Bài tập 7. Qua điểm A ở ngoài đường thẳng a vẽ 100 đường thẳng phân biệt. Chứng minh rằng ít nhất cũng có 99 đường thẳng cắt a.

Bài tập 8. Cho góc $x\hat{O}y$ khác góc bẹt và một điểm A ở trong góc đó. Một đường thẳng a đi qua điểm A và song song với Ox. Chứng minh rằng a cắt Oy.

Bài tập 9. Chứng minh rằng nếu hai đường thẳng song song bị cắt bởi một cát tuyến thì:

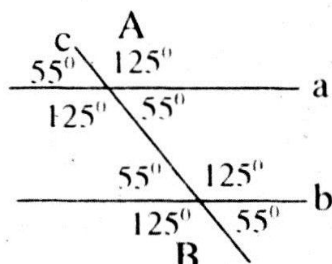
a. Hai tia phân giác của một cặp góc so le trong song song với nhau.

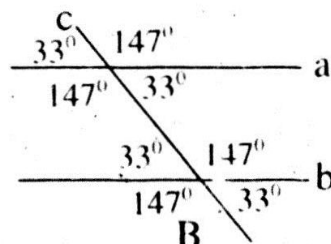
b. Hai tia phân giác của một cặp góc đồng vị song song với nhau.

c. Hai tia phân giác của một cặp góc trong cùng phía vuông góc với nhau.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

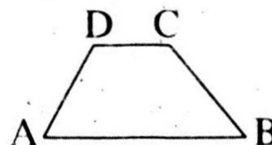
Bài tập 1. Ta được:





Bài tập 2. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 3. Khi đó:



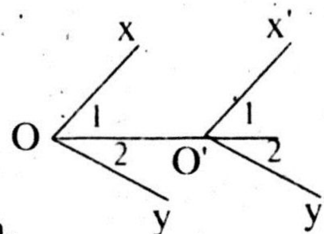
$\hat{D} = 180^0 - \hat{A} = 120^0$,

$\hat{B} = 180^0 - \hat{C} = 50^0$.

Bài tập 4. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 5. Nối OO', ta có nhận xét rằng:

- Vì Ox // O'x' nên $\hat{O}_1 = \hat{O}'_1$ do đồng vị.
- Vì Oy // O'y' nên $\hat{O}_2 = \hat{O}'_2$ do đồng vị.



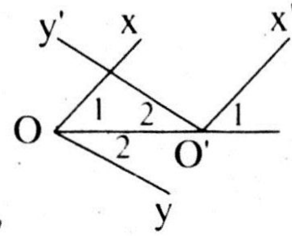
Khi đó:

$x\hat{O}y = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O}'_1 + \hat{O}'_2 = x'\hat{O}'y'$, đpcm.

Nhận xét: Qua ví dụ trên, chúng ta ghi nhận được một kết quả:

" *Hai góc có cạnh tương ứng song song cùng chiều thì bằng nhau*".

Bài tập 6. Nối OO', ta có nhận xét rằng:



- Vì Ox // O'x' nên $\hat{O}_1 = \hat{O}'_1$ do đồng vị.
- Vì Oy // O'y' nên $\hat{O}_2 = \hat{O}'_2$ do so le.

Khi đó:

$$x\hat{O}y = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O}'_1 + \hat{O}'_2 = 180^0 - x'\hat{O}'y'$$

$$\Leftrightarrow x\hat{O}y + x'\hat{O}'y' = 180^0\text{, đpcm.}$$

Yêu cầu: Qua ví dụ trên, hãy phát biểu kết quả.

Bài tập 7. *Sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng.*

Bài tập 8. *Sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng.*

CHỦ ĐỀ 5 TỪ VUÔNG GÓC ĐẾN SONG SONG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. QUAN HỆ GIỮA TÍNH VUÔNG GÓC VỚI TÍNH SONG SONG

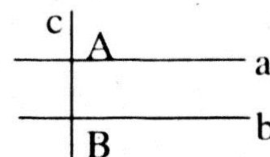
Trong chủ đề trước, chúng ta đã giải được thí dụ với yêu cầu " *Biết rằng hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với đường thẳng c. Chứng tỏ rằng a // b* ".

Như vậy, chúng ta ghi nhận được kết quả:

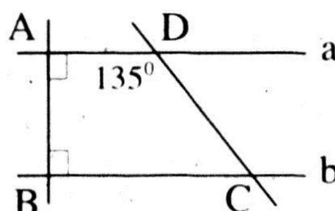
> *Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.*

Cụ thể, ta có minh hoạ:

$$\begin{cases} a \perp c \\ b \perp c \end{cases} \Rightarrow a \,//\, b.$$



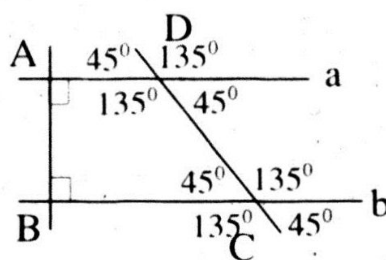
Thí dụ 1: Hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại:



Giải

Với hình vẽ, ta có:

$$\begin{cases} a \perp AB \\ b \perp AB \end{cases} \Rightarrow a \,//\, b,$$



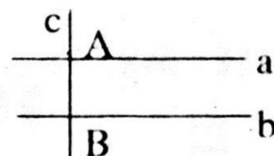
từ đó, ta nhận được cách điền góc như hình vẽ.

Cũng trong chủ đề trước, chúng ta đã giải được ví dụ với yêu cầu " *Cho a // b chứng tỏ rằng nếu đường thẳng c cắt đường thẳng a thì cũng cắt đường thẳng b* ", nếu trong giả thiết trên chúng ta thay c cắt a bằng cvg với a thì ta có thể khẳng định được rằng khi đó b cũng vuông góc với c.

Như vậy, chúng ta ghi nhận được kết quả:

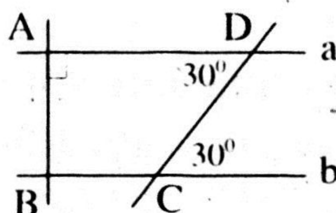
> *Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó vuông góc với đường thẳng kia*

Cụ thể, ta có minh hoạ:



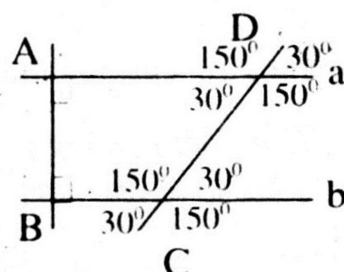
$$\begin{cases} a \parallel b \\ a \perp c \end{cases} \Rightarrow b \perp c.$$

Thí dụ 2: Hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại:



Giải

Với hình vẽ, ta có:



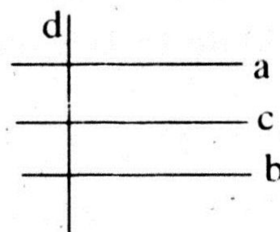
$$\begin{cases} a \parallel b \\ a \perp AB \end{cases} \Rightarrow b \perp AB,$$

từ đó, ta nhận được cách điền góc như hình vẽ.

2. BA ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Thí dụ 3: Cho ba đường thẳng a, b, c, biết a // c và b // c. Chứng tỏ rằng a // b.

Giải



Kẻ đường thẳng $d \perp a$, suy ra:

$d \perp c$, vì a // c

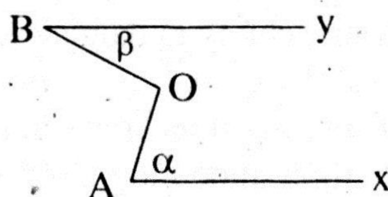
$\Rightarrow d \perp b$, vì c // b.

Từ đó, ta thấy a và b cùng vuông góc với đường thẳng d nên a // b.

Như vậy, chúng ta ghi nhận được kết quả:

> *Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.*

Thí dụ 4: Trên hình vẽ, cho $\widehat{AOB} = \alpha + \beta$. Chứng minh rằng Ax // By.



Giải

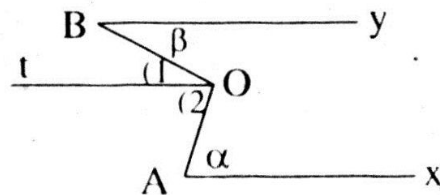
Trong góc $\widehat{AOB}$ dựng tia Ot // Ax, suy ra:

$\hat{O}_2 = \hat{A} = \alpha.$

Khi đó:

$\hat{O}_1 = A\hat{O}B - \hat{O}_2$

$= \alpha + \beta - \alpha = \beta = \hat{B}$



$\Leftrightarrow$ Ot // By, vì có hai góc so le trong bằng nhau.

Vậy, ta có:

Ot // Ax và Ot // By $\Rightarrow$ Ax // By, đpcm.

Nhận xét: 1. Như vậy, trong lời giải trên chúng ta đã sử dụng thêm đường phụ là tia Ot. Một câu hỏi thường được các em học sinh đặt ra là " *Tại sao lại nghĩ được như vậy ?* ". Câu trả lời có thể được lí giải như sau:

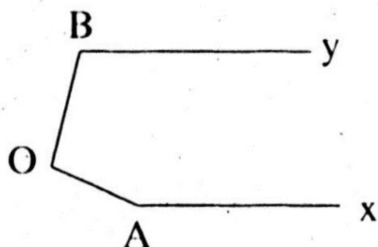
- Ta thấy hai tia Ax và By chưa có một cát tuyến nên chưa thể có được các cặp góc so le trong hoặc cặp góc trong cùng phía.
- Theo hình vẽ ta có hai cát tuyến chung gốc O là OA và OB.

Chính vì vậy, ta nghĩ ngay tới việc sử dụng một đường thẳng chung gian đi qua O, đó chính là tia Ot.

2. Ở đây, để chứng minh hai đường thẳng song song, ta đi chứng minh nó cùng song song với đường thẳng thứ ba. Thí dụ tiếp theo, chúng ta sẽ sử dụng điều ngược lại, tức là với hai đường thẳng song song cho trước chúng ta sẽ tạo ra một đường thẳng song song với chúng để thực hiện đòi hỏi của bài toán.

Thí dụ 5: Trên hình vẽ, cho Ax // By. Chứng minh rằng:

$$\hat{A} + A\hat{O}B + \hat{B} = 360^0.$$



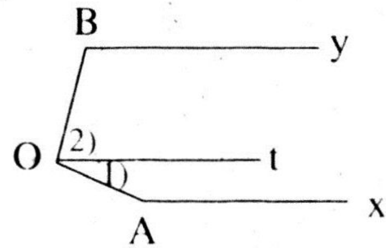
Giải

Dựng tia Ot // Ax, suy ra:

$\hat{O}_1 + \hat{A} = 180^0.$

Mặt khác, vì Ax // By nên Ot // By, suy ra:

$\hat{O}_2 + \hat{B} = 180^0$.

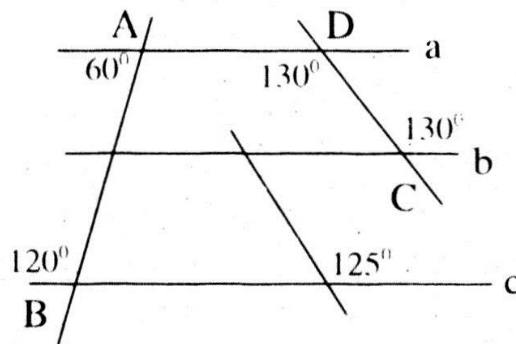


Vậy, ta có:

$$\hat{A} + A\hat{O}B + \hat{B} = \hat{A} + \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{B}$$
$$= 180^0 + 180^0 = 360^0.$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại:



Giải

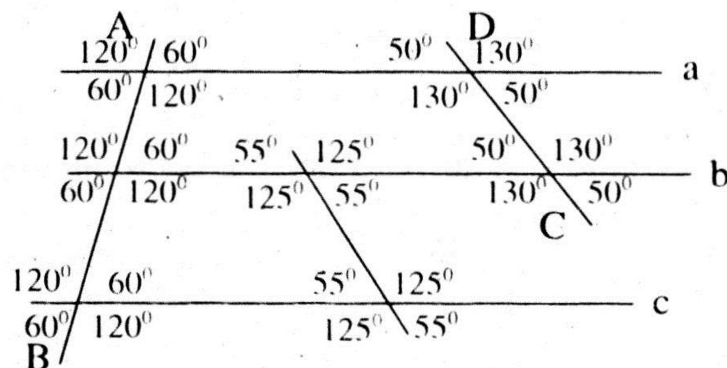
Với hình vẽ, ta có:

a // b vì có hai góc so le trong bằng nhau.

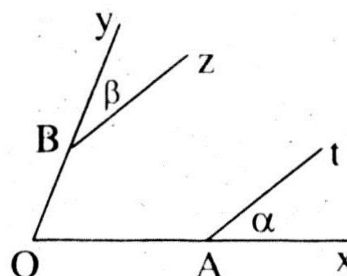
a // c vì có hai góc trong cùng phía phụ nhau.

suy ra a // b // c.

Vậy, ta nhận được cách điền góc như hình vẽ.

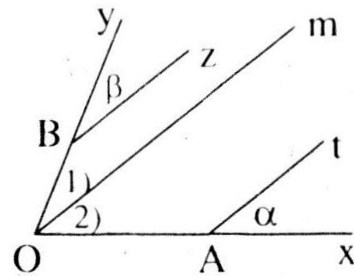


Ví dụ 2: Trên hình vẽ, cho $x\hat{O}y = \alpha + \beta$. Chứng minh rằng At // Bz.



Giải

Trong góc $A\hat{O}B$ dựng tia Om // At, suy ra:



$\hat{O}_2 = x\hat{A}t = \alpha$.

Khi đó:

$\hat{O}_1 = x\hat{O}y - \hat{O}_2 = \alpha + \beta - \alpha$

$= \beta = y\hat{B}z$

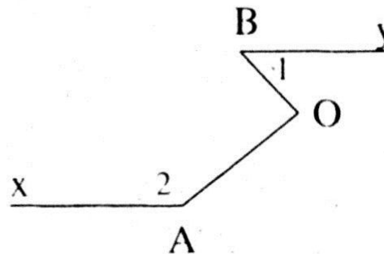
⇔ Om // Bz, vì có hai góc đồng vị trong bằng nhau.

Vậy, ta có:

Om // At và Om // Bz

⇒ At // Bz, đpcm.

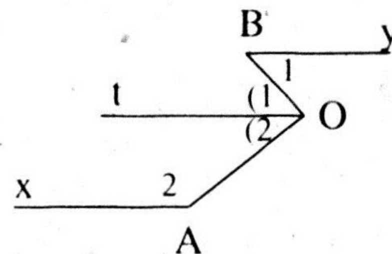
Ví dụ 3: Trên hình vẽ, cho $A\hat{O}B + \hat{A}_2 - 180^0 = \hat{B}_1$. Chứng minh rằng Ax // By.



Giải

Trong góc $A\hat{O}B$ dựng tia Ot // Ax, suy ra:

$\hat{A}_2 + \hat{O}_2 = 180^0$.



Khi đó:

$\hat{O}_1 = A\hat{O}B - \hat{O}_2$

$= A\hat{O}B - (180^0 - \hat{A}_2)$

$= A\hat{O}B + \hat{A}_2 - 180^0 = \hat{B}_1$

⇔ Ot // By, vì có hai góc so le trong bằng nhau.

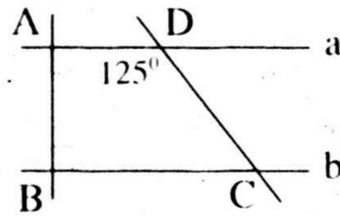
Vậy, ta có:

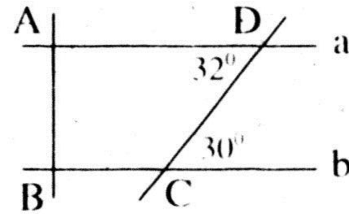
Ot // Ax và Ot // By

⇒ Ax // By, đpcm.

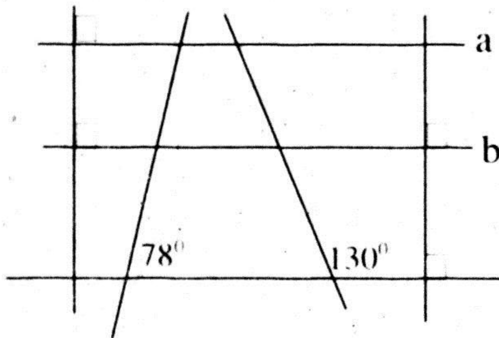
III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

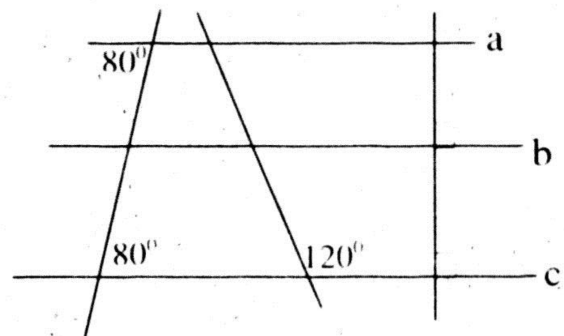
Bài tập 1. Hãy điền vào các hình sau số đo của các góc còn lại:



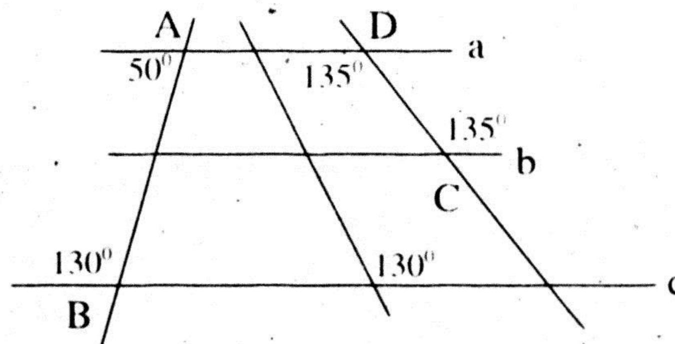


Bài tập 2. Hãy điền vào các hình sau số đo của các góc còn lại:

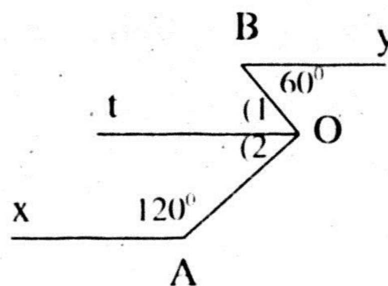




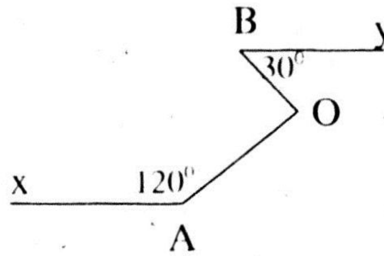
Bài tập 3. Hãy điền vào hình sau số đo của các góc còn lại:



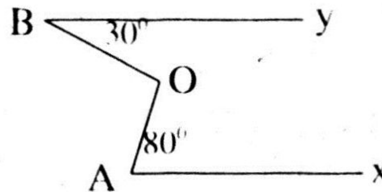
Bài tập 4. Trên hình vẽ bên, cho $\widehat{AOB} = 120^0$ và Ot là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$. Chứng minh rằng Ax // By.



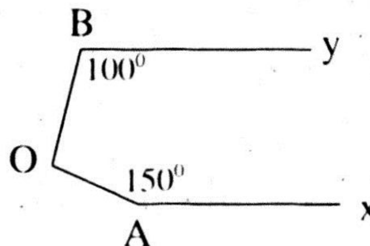
Bài tập 5. Trên hình vẽ, cho $\widehat{AOB} = 90^0$. Chứng minh rằng Ax // By.



Bài tập 6. Trên hình vẽ, cho $\widehat{AOB} = 110^0$. Chứng minh rằng Ax // By.



Bài tập 7. Trên hình vẽ, cho $\widehat{AOB} = 110^0$. Chứng minh rằng Ax // By.



Bài tập 8. Cho ΔABC và một đường thẳng d song song với BC. Chứng minh rằng:

Nếu d cắt cạnh AB thì d cắt cạnh AC.

Nếu d cắt tia đối của tia BA thì d cắt tia đối của tia CA.

IV. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 2. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 3. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 4. Theo giả thiết, Ot là tia phân giác của góc $\widehat{AOB} = 120^0$ nên:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 60^0$.

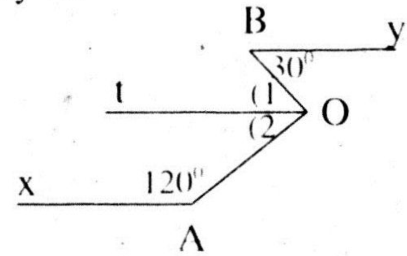
Nhận xét rằng:

- Vì $\hat{O}_1 = \widehat{OBy}$ nên Ot // By bởi vì chúng có hai góc so le trong bằng nhau.
- Vì $\hat{O}_2 + \widehat{OAx} = 180^0$ nên Ot // Ax bởi vì chúng có hai góc trong cùng phía bù nhau.

Vậy, ta có:

Ot // Ax và Ot // By $\Rightarrow$ Ax // By, đpcm.

Bài tập 5. Trong góc AÔB dựng tia Ot // Ax, suy ra:



$\hat{A} + \hat{O}_2 = 180^0$

$\Rightarrow \hat{O}_2 = 180^0 - \hat{A} = 180^0 - 120^0 = 60^0$.

Khi đó:

$\hat{O}_1 = A\hat{O}B - \hat{O}_2 = 90^0 — 60^0 = 30^0 = \hat{B}$

$\Leftrightarrow$ Ot // By, vì có hai góc so le trong bằng nhau.

Vậy, ta có:

Ot // Ax và Ot // By $\Rightarrow$ Ax // By, đpcm.

CHƯƠNG II - TAM GIÁC

Trong chương này, chúng ta sẽ thu nhận được khái niệm về tứ giác và đi nghiên cứu chi tiết các tứ giác có dạng đặc biệt cùng với các phép đối xứng trục và đối xứng tâm, cụ thể:

1. **Tổng ba góc của một tam giác**
2. **Hai tam giác bằng nhau**
3. **Tam giác cân**
4. **Định lí Py - ta - go**
5. **Các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông**

CHỦ ĐỀ 1 TỔNG BA GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. TỔNG BA GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC

Một câu hỏi được đặt ra khá tự nhiên đó là " *Tổng các góc trong một tam giác bằng bao nhiêu ?* " , để trả lời câu hỏi này chúng ta cũng nhau thực hiện thí dụ sau:

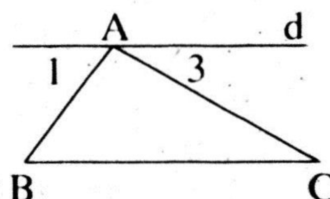
Thí dụ 1: Cho ΔABC. Tính tổng $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$.

Giải

Qua A kẻ đường thẳng d song song với BC, ta ngận thấy ngay:

$\hat{B} = \hat{A}_1$, vì so le trong.

$\hat{C} = \hat{A}_3$, vì so le trong.



Khi đó:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A} + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^0.$$

Nhận xét:

1. Như vậy, để tính được tổng của ba góc trong một tam giác chúng ta đã lựa chọn cách chuyển chúng về các góc cùng đỉnh (trong lời giải này chúng ta lựa chọn đỉnh A). Các em học sinh hãy sử dụng đỉnh B, C để tìm lại kết quả trên.
2. Vì ΔABC được cho bất kỳ, còn kết quả

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0, \text{ là hằng số.}$$

Vậy, thí dụ trên chính là phép chứng minh của định lí sau:

> *Tổng ba góc của một tam giác bằng 180^0.*

Thí dụ 2: Cho ΔABC, biết $\hat{A} = 35^0$ và $\hat{B} = 75^0$. Tính số đo của góc $\hat{C}$.

Giải

Ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0$$

$$\Leftrightarrow \hat{C} = 180^0 - \hat{A} - \hat{B} = 180^0 - 35^0 - 75^0 = 70^0.$$

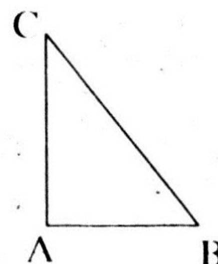
Vậy, ta có $\hat{C} = 70^0$.

2. ÁP DỤNG VÀO TAM GIÁC VUÔNG

Ta có định nghĩa của tam giác vuông:

> ***Tam giác vuông** là tam giác có một góc vuông.*

Với ΔABC có $\hat{A} = 90^0$, ta nói:



- ΔABC vuông tại A.
- AB, AC gọi là các cạnh góc vuông và BC là cạnh huyền.
- Các góc $\hat{B}$, $\hat{C}$ là hai góc nhọn của tam giác.

Nhận xét: Như vậy, nếu ΔABC vuông tại A ta sẽ nhận được:

$$\hat{A} = 90^0.$$

Mặt khác, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0$$

$$\Leftrightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^0 - \hat{A} = 90^0$$

$\Leftrightarrow$ hai góc $\hat{B}$ và $\hat{C}$ phụ nhau.

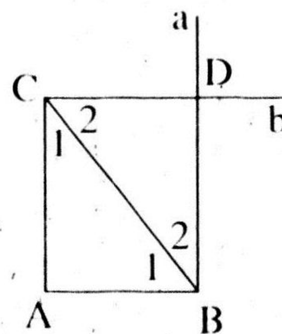
Vậy, ta có kết quả:

> *Trong tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau.*

Thí dụ 3: Cho ΔABC vuông tại A. Qua B kẻ đường thẳng a song song với AC, qua C kẻ đường thẳng b song song với AB. Giả sử a, b cắt nhau tại D. Chứng minh rằng ΔBCD vuông.

Giải

Ta lần lượt có:



- Vì BD // AC nên $\hat{B}_2 = \hat{C}_1$.
- Vì CD // AB nên $\hat{C}_2 = \hat{B}_1$.
- Vì ΔABC vuông tại A nên :

$$90^0 = \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = \hat{C}_2 + \hat{B}_2$$

$\Leftrightarrow$ ΔBCD vuông tại D.

3. GÓC NGOÀI CỦA TAM GIÁC

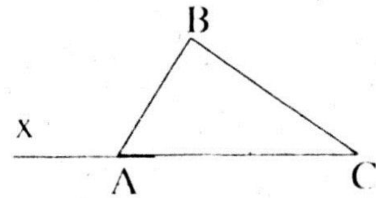
Ta có định nghĩa sau:

Góc ngoài của một tam giác là góc kề bù với một góc của tam giác ấy.

Nhận xét: Như vậy:

$$x\hat{A}B + \hat{A} = 180^0$$

$$\Leftrightarrow x\hat{A}B = 180^0 - \hat{A}.$$



Mặt khác, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{A} = 180^0 - \hat{B} - \hat{C}$$

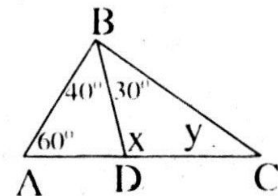
Từ đó, suy ra:

$$x\hat{A}B = 180^0 - (180^0 - \hat{B} - \hat{C}) = \hat{B} + \hat{C}.$$

Vậy, ta có kết quả:

Mỗi góc ngoài của một tam giác bằng tổng của hai góc trong không kề với nó.

Thí dụ 4: Tính số đo x và y ở hình vẽ bên.



Giải

Trong ΔABD, ta có:

$$x = C\hat{D}B = \hat{A} + A\hat{B}D = 60^0 + 40^0 = 100^0.$$

Trong ΔBCD, ta có:

$$\hat{C} + C\hat{D}B + C\hat{B}D = 180^0$$

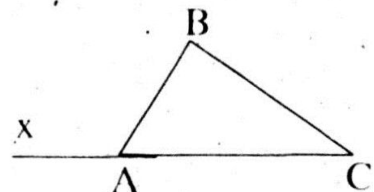
$$\Leftrightarrow y = \hat{C} = 180^0 - C\hat{D}B - C\hat{B}D = 180^0 - 100^0 - 30^0 = 50^0.$$

Vậy, ta được $x = 110^0$ và $y = 50^0$.

Nhận xét: Như vậy, ta có:

$$x\hat{A}B = \hat{B} + \hat{C}$$

$$\Rightarrow x\hat{A}B > \hat{B} \text{ và } x\hat{A}B > \hat{C}.$$



Từ đây, ta thu được nhận xét quan trọng:

" *Góc ngoài của tam giác lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó* ".

Kết quả này sẽ có ích trong các bài toán so sánh góc,

để minh hoạ chúng ta xem xét thí dụ sau:

Thí dụ 5: Cho ΔABC, điểm M nằm trong tam giác đó. Tia AM cắt BC tại K. Hãy so sánh các góc:

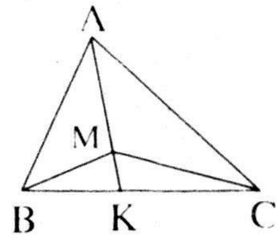
a. $\widehat{CMK}$ với $\widehat{CAK}$.

b. $\widehat{CMB}$ với $\widehat{CAB}$.

Giải

a. Xét ΔAMC, có $\widehat{CMK}$ là góc ngoài đỉnh C nên:

$$\widehat{CMK} = \widehat{CAK} + \widehat{ACM} > \widehat{CAK}.$$



Vậy, ta luôn có $\widehat{CMK} > \widehat{CAK}$. (1)

b. Tương tự, ta cũng có:

$$\widehat{BMK} > \widehat{BAK}. \quad (2)$$

Cộng theo vế (1), (2), ta được:

$$\widehat{CMK} + \widehat{BMK} > \widehat{CAK} + \widehat{BAK} \Leftrightarrow \widehat{CMB} > \widehat{CAB}.$$

Vậy, ta luôn có $\widehat{CMB} > \widehat{CAB}$.

Chú ý:

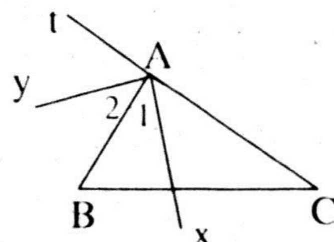
1. Với cách trình bày như trên chúng ta sẽ thực hiện được bài toán " *Cho ΔABC vuông tại A. Gọi M là một điểm nằm trong tam giác đó. Chứng minh rằng góc $\widehat{BMC}$ là góc tù* ".
2. Ta thấy, với mỗi đỉnh của tam giác ta có được hai góc (*góc trong và góc ngoài*), từ đó ta cũng sẽ có được hai đường phân giác tương ứng (*phân giác trong và phân giác ngoài*). Vấn đề đặt ra là hai đường phân giác này có mối liên hệ với nhau như thế nào ? Để tìm ra câu trả lời chúng ta sẽ thực hiện thêm một thí dụ.

Thí dụ 6: Cho ΔABC. Chứng minh rằng hai tia phân giác trong và tia phân giác ngoài của góc $\hat{A}$ vuông góc với nhau.

Giải

Gọi Ax, Ay theo thứ tự là các tia phân giác trong và tia phân giác ngoài của góc $\hat{A}$, ta phải đi chứng minh $Ax \perp Ay$, tức là chứng minh $x\hat{A}y = 90^0$. Thật vậy, ta có:

$$\hat{A}_1 = \frac{1}{2}B\hat{A}C.$$



$\hat{A}_2 = \frac{1}{2}B\hat{A}t.$

$x\hat{A}y = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \frac{1}{2}B\hat{A}C + \frac{1}{2}B\hat{A}t = \frac{1}{2}(B\hat{A}C + B\hat{A}t)$

$= \frac{1}{2}.180^0 = 90^0$, đpcm.

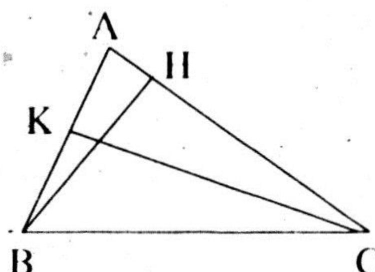
Nhận xét: Kể từ đây, chúng ta được phép sử dụng kết quả này vào các bài tập khác.

4. CẶP GÓC CÓ CẠNH TƯƠNG ỨNG VUÔNG GÓC

Một câu hỏi được đặt ra là " *Nếu hai góc xAy và tBz có các cặp cạnh tương ứng vuông góc với nhau (Ax ⊥ Bt và Ay ⊥ Bz) thì chúng có mối liên hệ gì với nhau ?* ", để trả lời được một phần câu hỏi này chúng ta xem xét thí dụ sau:

Thí dụ 7: Cho ΔABC nhọn. Vẽ BH vuông góc với AC (H ∈ AC), vẽ CK vuông góc với AB (K ∈ AB). Chứng minh rằng $A\hat{B}H = A\hat{C}K$.

Giải



Ta lần lượt có:

- Vì ΔABH vuông tại H nên:

  $A\hat{B}H = 90^0 - \hat{A}$. (1)

- Vì ΔACK vuông tại K nên:

  $A\hat{C}K = 90^0 - \hat{A}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $A\hat{B}H = A\hat{C}K$, dpcm.

Nhận xét: Như vậy, với hai góc $A\hat{B}H$, $A\hat{C}K$ ta thấy:

BA ⊥ CK và BH ⊥ CA (có cạnh tương ứng vuông góc)

Điều này, có thể được tổng quát rằng:

" *Hai góc có cạnh tương ứng vuông góc thì bằng nhau ?* ".

Câu trả lời là không ?

Chúng ta có kết quả sau:

Nếu hai góc có cạnh tương ứng vuông góc thì chúng bằng nhau hoặc bù nhau, cụ thể:

1. *Chúng bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù.*
2. *Chúng bù nhau nếu góc này nhọn và góc kia tù.*

3. *Nếu một góc vuông thì góc còn lại cũng vuông.*

Để minh hoạ trực quan kết quả trên chúng ta hãy xem thí dụ sau:

Thí dụ 8: Cho ΔABC vuông tại A. Vẽ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Lấy điểm M bất kì trên cạnh AC, vẽ MN vuông góc với BC ($N \in BC$).

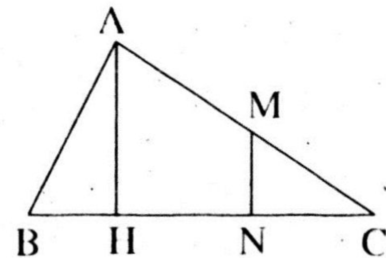
a. Tìm góc bằng góc $\hat{B}$.

b. Tìm góc bằng góc $\hat{C}$.

c. Tìm góc bù với góc $\hat{B}$.

Giải

a. Ta có:



$BA \perp AC$, $BC \perp AH$

Các góc $\hat{B}$ và $\widehat{CAH}$ đều nhọn

suy ra $\hat{B} = \widehat{CAH}$.

Ta có:

$$\begin{cases} MN \perp BC \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow MN \,//\, AH \Rightarrow \widehat{NMC} = \widehat{CAH} = \hat{B}.$$

b. Tương tự câu a), ta có ngay $\hat{C} = \widehat{BAH}$.

c. Ta có:

$BA \perp MA$, $BC \perp MN$

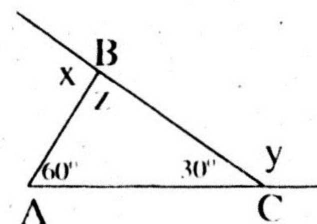
Góc $\hat{B}$ nhọn còn góc $\widehat{AMN}$ tù

suy ra $\hat{B} + \widehat{AMN} = 180^0$.

Nhận xét: Ở đây, cũng có thể sử dụng góc có cạnh tương ứng vuông góc để kết luận $\widehat{NMC} = \hat{B}$. Việc trình bày lời giải như trên chỉ với mục đích giúp các em học sinh ôn lại kiến thức về mối quan hệ giữa tính song song và vuông góc.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví du 1: Tính số đo x, y và z ở hình vẽ bên.



Giải

Ta có ngay:

$x = \hat{A} + \hat{C} = 60^0 + 30^0 = 90^0$.

$y + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow y = 180^0 - \hat{C} = 180^0 - 30^0 = 150^0$.

$z = 180^0 - \hat{A} - \hat{C} = 180^0 - 60^0 - 30^0 = 90^0$.

Vậy, ta được $x = 90^0$, $y = 150^0$ và $z = 90^0$.

Ví dụ 2: Cho ΔABC có $\hat{A} = 80^0$ và $\hat{B} - \hat{C} = 20^0$. Tính $\hat{B}$, $\hat{C}$.

Giải

Từ giả thiết:

$$\hat{B} - \hat{C} = 20^0 \Leftrightarrow \hat{B} = 20^0 + \hat{C}.$$

Trong ΔABC, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow 80^0 + 20^0 + \hat{C} + \hat{C} = 180^0$$

$$\Leftrightarrow 2\hat{C} = 80^0 \Leftrightarrow \hat{C} = 40^0$$

Khi đó:

$$\hat{B} = 20^0 + \hat{C} = 20^0 + 40^0 = 60^0.$$

Vậy, ta tìm được $\hat{B} = 60^0$, $\hat{C} = 40^0$.

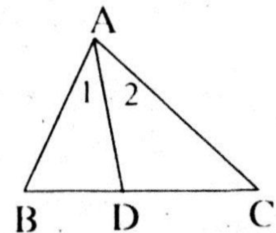
Ví dụ 3: Cho ΔABC có $\hat{B} = 80^0$, $\hat{C} = 44^0$. Tia phân giác của góc A cắt BC ở D. Tính số đo các góc $\hat{A}$, $\widehat{ADB}$, $\widehat{ADC}$.

Giải

Ta có:

$$\hat{A} = 180^0 - \hat{B} - \hat{C} = 180^0 - 80^0 - 44^0 = 56^0.$$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{1}{2}\hat{A} = 28^0.$$



Trong ΔACD, ta có:

$$\widehat{ADB} = \hat{A}_2 + \hat{C} = 28^0 + 44^0 = 72^0.$$

$$\widehat{ADC} = 180^0 - \widehat{ADB} = 180^0 - 72^0 = 108^0.$$

Vậy ta nhận được $\hat{A} = 56^0$, $\widehat{ADB} = 72^0$, $\widehat{ADC} = 108^0$.

Ví dụ 4: Cho ΔABC có số đo các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ lần lượt tỉ lệ với 1, 2, 3. Tính số đo các góc của ΔABC và khi đó có kết luận gì về ΔABC ?

Giải

Trong ΔABC, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0.$$

Từ giả thiết ta có:

$$\frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{3} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{3} = \frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{1+2+3} = \frac{180}{6} = 30^0.$$

Từ đó, suy ra:

$$\hat{A} = 30^0,\ \hat{B} = 60^0,\ \hat{C} = 90^0.$$

Vậy, ta được số đo các góc của tam giác là $\hat{A} = 30^0$, $\hat{B} = 60^0$, $\hat{C} = 90^0$.

Như vậy, ta thấy ΔABC vuông tại C.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng tổng ba góc ngoài của một tam giác bằng 360^0.

Giải

Gọi $\hat{A}_1$, $\hat{B}_1$, $\hat{C}_1$ theo thứ tự là ba góc ngoài của các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ của ΔABC.

Ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0.$$

$$\hat{A}_1 = 180^0 - \hat{A},$$

$$\hat{B}_1 = 180^0 - \hat{B},$$

$$\hat{C}_1 = 180^0 - \hat{C}$$

suy ra:

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = (180^0 - \hat{A}) + (180^0 - \hat{B} + (180^0 - \hat{C})$$

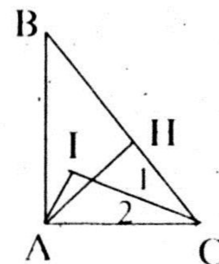
$$= 480^0 - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) = 480^0 - 180^0 = 360^0, \text{dpcm}$$

Ví dụ 6: Cho ΔABC vuông tại A. Vẽ AH vuông góc với BC. Các tia phân giác của các góc $\hat{C}$ và $B\hat{A}H$ cắt nhau tại I. Chứng minh rằng $A\hat{I}C = 90^0$.

Giải

Theo tính chất góc có cạnh tương ứng vuông góc, ta có:

$$B\hat{A}H = \hat{C},\ C\hat{A}H = \hat{B}.$$



Theo tính chất đường phân giác, ta có:

$$\hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \frac{1}{2}\hat{C},$$

$$B\hat{A}I = H\hat{A}I = \frac{1}{2}B\hat{A}H = \frac{1}{2}\hat{C}.$$

Ta có:

$$\widehat{AIC} = 180^0 - \widehat{IAC} - \hat{C}_2 = 180^0 - (\widehat{IAH} + \widehat{CAH}) - \hat{C}_2$$

$$= 180^0 - (\frac{1}{2}\hat{C} + \hat{B}) - \frac{1}{2}\hat{C} = 180^0 - (\hat{B} + \hat{C})$$

$$= 180^0 - 90^0 = 90^0, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 7: Cho ΔABC vuông tại A. Vẽ đường phân giác BD, giả sử $\widehat{ADB} = \alpha$.

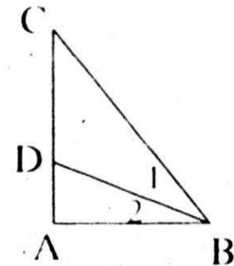
a. Chứng minh rằng $45^0 < \alpha < 90^0$.

b. Tính theo α số đo của góc $\hat{C}$.

Giải

a. Trong ΔABD vuông tại A, ta có:

$\widehat{ADB} < 90^0 \Leftrightarrow \alpha < 90^0$. (1)



$\widehat{ADB} = 90^0 - \hat{B}_2 = 90^0 - \frac{1}{2}\hat{B}$. (*)

Trong ΔABC vuông tại A, ta có:

$\hat{B} < 90^0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\hat{B} < 45^0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\hat{B} > -45^0 \Leftrightarrow 90^0 - \frac{1}{2}\hat{B} > 90^0 - 45^0$

$\Leftrightarrow \widehat{ADB} > 45^0 \Leftrightarrow \alpha > 45^0$. (2)

Từ (1), (2), ta được $45^0 < \alpha < 90^0$, đpcm.

b. Ta có:

$\hat{C} = 90^0 - \hat{B}$. (3)

Từ (*), suy ra:

$\hat{B} = 180^0 - 2\alpha$.
(4)

Thay (4) vào (3), ta được:

$\hat{C} = 90^0 - (180^0 - 2\alpha) = 2\alpha - 90^0$.

Nhận xét: Để tránh được việc phải sử dụng các biến đổi dạng bất đẳng thức, chúng ta có thể chứng minh $\alpha > 45^0$ bằng

phương pháp chứng minh phản chứng như sau:

Giả sử trái lại :

$$\alpha < 45^0 \Leftrightarrow A\hat{D}B < 45^0 \Rightarrow \hat{B}_2 > 45^0$$

$$\Leftrightarrow 2\hat{B}_2 > 2.45^0 \Leftrightarrow \hat{B} > 90^0, \text{ mâu thuẫn.}$$

Ví dụ 8: Cho ΔABC. Đường phân giác của góc B và đường phân giác ngoài của góc C cắt nhau tại M. Đường phân giác của góc C và đường phân giác ngoài của góc B cắt nhau tại N. Chứng minh rằng:

$$B\hat{M}C = B\hat{N}C = \frac{1}{2}\hat{A}.$$

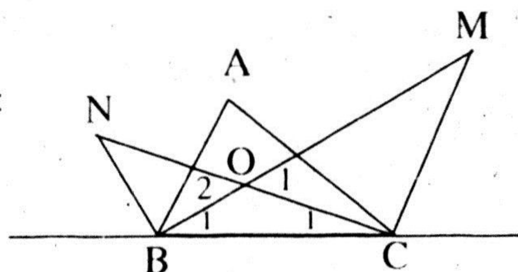
Giải

Dựa trên tính chất hai đường phân giác ta có ngay:

$$\bar{B}_1 = \frac{1}{2}\bar{B},\ \bar{C}_1 = \frac{1}{2}\bar{C},$$

$$O\hat{C}M = 90^0,\ O\hat{B}N = 90^0.$$

Vì $\hat{O}_1$ là một góc ngoài của ΔOBC nên:



$$\hat{O}_1 = \bar{B}_1 + \bar{C}_1 = \frac{1}{2}(\bar{B} + \bar{C})$$

$$= \frac{1}{2}(180^0 - \hat{A}) = 90^0 - \frac{1}{2}\hat{A}.$$

Trong ΔCMO vuông tại C, ta có:

$$B\hat{M}C = O\hat{M}C = 90^0 - \hat{O}_1 = 90^0 - (90^0 - \frac{1}{2}\hat{A}) = \frac{1}{2}\hat{A}.$$

Trong ΔBNO vuông tại B, ta có:

$$B\hat{N}C = B\hat{N}O = 90^0 - \hat{O}_2 = 90^0 - \hat{O}_1 = 90^0 - (90^0 - \frac{1}{2}\hat{A}) = \frac{1}{2}\hat{A}.$$

Vậy, ta được $B\hat{N}C = B\hat{N}C = \frac{1}{2}\hat{A}$.

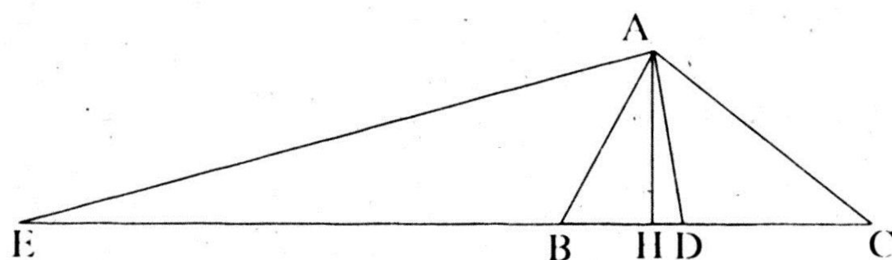
Ví dụ 9: Cho ΔABC có $\hat{B} > \hat{C}$. Gọi AD, AE theo thứ tự là đường phân giác trong, phân giác ngoài của góc A (D, E thuộc đường thẳng BC).

a. Chứng minh rằng $A\hat{D}C - A\hat{D}B = \hat{B} - \hat{C}$.

b. Kẻ đường cao AH. Chứng minh rằng $A\hat{E}B = H\hat{A}D = \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C})$.

c. Tính số đo của các góc $A\widehat{D}B$, $A\widehat{D}C$ và $H\widehat{A}D$, biết $\hat{B} - \hat{C} = 40^0$.

Giải



a. Vì AD là tia phân giác góc $\hat{A}$ nên:

$$B\hat{A}D = C\hat{A}D = \frac{1}{2}\hat{A}.$$

Vì các góc $A\widehat{D}C$ và $A\widehat{D}B$ theo thứ tự là các góc ngoài của ΔABD, ΔACD nên:

$$A\widehat{D}C = \hat{B} + B\hat{A}D.$$

$$A\widehat{D}B = \hat{C} + C\hat{A}D.$$

suy ra:

$$A\widehat{D}C - A\widehat{D}B = \hat{B} + B\hat{A}D - \hat{C} - C\hat{A}D = \hat{B} - \hat{C}, \text{ đpcm.}$$

b. Trước tiên ta có:

$A\hat{E}B = H\hat{A}D$, vì hai góc có cạnh tương ứng vuông góc.

Ta có:

$$A\widehat{D}C + A\widehat{D}B = 180^0 \Leftrightarrow A\widehat{D}C = 180^0 - A\widehat{D}B. \qquad (*)$$

Thay (*) vào kết quả câu a), ta được:

$$(180^0 - A\widehat{D}B) - A\widehat{D}B = \hat{B} - \hat{C} \Leftrightarrow 2A\widehat{D}B = 180^0 - (\hat{B} - \hat{C})$$

$$\Leftrightarrow A\widehat{D}B = 90^0 - \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C}).$$

Trong ΔHAD vuông tại H ta lại có:

$$H\hat{A}D = 90^0 - A\widehat{D}H = 90^0 - A\widehat{D}B = 90^0 - [90^0 - \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C})]$$

$$= \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C}).$$

Vậy, ta được $A\hat{E}B = H\hat{A}D = \frac{1}{2}(\hat{B} \quad \hat{C})$.

c. Theo giả thiết, ta có:

$A\hat{D}C - A\hat{D}B = 40^0$. (1)

Mặt khác, ta lại có:

$A\hat{D}C + A\hat{D}B = 180^0$. (2)

Từ (1), (2), suy ra:

$A\hat{D}B = 70^0$, $A\hat{D}C = 110^0$.

Trong ΔHAD vuông tại H, ta có:

$H\hat{A}D = 90^0 - A\hat{D}H = 90^0 - A\hat{D}B = 90^0 - 70^0 = 20^0$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Trong một tam giác, tổng ba góc trong bằng bao nhiêu ? Vì sao ?
Câu hỏi 2: Trong một tam giác, tổng ba góc ngoài bằng bao nhiêu ? Vì sao ?
Câu hỏi 3: Phát biểu định nghĩa tam giác vuông.
Câu hỏi 4: Tam giác nào có hai góc phụ nhau ? Vì sao ?

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho ΔABC. Tính số đo của góc $\hat{C}$, biết:

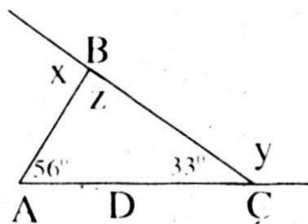
a. $\hat{A} = 45^0$ và $\hat{B} = 85^0$.

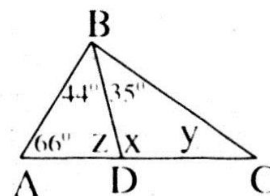
b. $\hat{A} = 40^0$ và $\hat{B} = 30^0$.

c. $\hat{A} = \hat{B} = 39^0$.

d. $\hat{A} = 36^0$ và $\hat{B} = \hat{C}$.

Bài tập 2. Tính số đo x, y và z ở các hình vẽ bên.





Bài tập 3. Tính các góc $\hat{B}$, $\hat{C}$ của ΔABC, biết:

a. $\hat{A} = 100^0$ và $\hat{B} - \hat{C} = 20^0$.

b. $\hat{A} = 60^0$ và $\hat{B} - \hat{C} = 60^0$.

c. $\hat{A} = 40^0$ và $\hat{B} - \hat{C} = 30^0$.

Bài tập 4. Cho ΔABC. Hai tia phân giác của góc B và C cắt nhau tại I. Tính số đo góc $B\hat{I}C$, biết:

a. $\hat{B} = 80^0$, $\hat{C} = 40^0$.

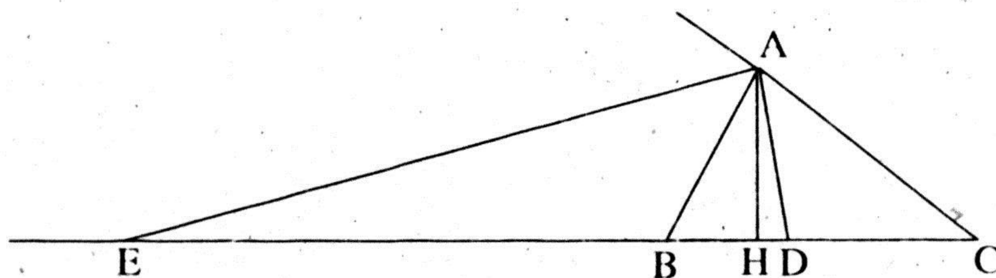
b. $\hat{A} = 100^0$.

Bài tập 5. Cho ΔABC. Tia phân giác của góc A cắt BC ở D. Tính số đo các góc $\hat{A}$, $A\hat{D}B$, $A\hat{D}C$, biết:

a. $\hat{B} = 80^0$, $\hat{C} = 30^0$.

b. $\hat{B} = 50^0$, $\hat{C} = 60^0$.

Bài tập 6. Điền số đo các góc vào hình vẽ sau, biết $B\hat{A}D = 45^0$, $A\hat{B}C = 60^0$, AD, AE theo thứ tự là đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\hat{A}$.



Bài tập 7. Cho ΔABC có số đo các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ lần lượt tỉ lệ với 1, 4, 7. Tính số đo các góc của ΔABC.

Bài tập 8. Cho ΔABC có số đo các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ lần lượt tỉ lệ với 3, 5, 7. Tính số đo các góc của ΔABC.

Bài tập 9. Cho ΔABC vuông tại A. Gọi M là một điểm nằm trong tam giác đó. Chứng minh rằng góc $B\hat{M}C$ là góc tù

Bài tập 10. Cho ΔABC có $\hat{B} = 80^0$, $\hat{C} = 60^0$. Gọi AD, AE theo thứ tự là đường phân giác trong, phân giác ngoài của góc A (D, E thuộc đường thẳng BC).

a. Tính số đo của các góc $A\hat{D}C$, $A\hat{D}B$.

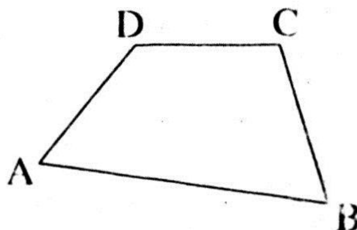
b. Kẻ đường cao AH. Tính số đo của các góc $A\hat{E}B$, $H\hat{A}D$.

Bài tập 11. Cho ΔABC có $\hat{B} - \hat{C} = 30^0$. Gọi AD, AE theo thứ tự là đường phân giác trong, phân giác ngoài của góc A (D, E thuộc đường thẳng BC).

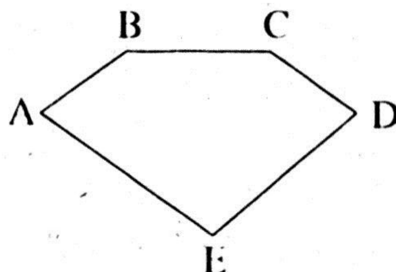
a. Tính số đo của các góc $A\hat{D}C$, $A\hat{D}B$.

b. Kẻ đường cao AH. Tính số đo của các góc $A\hat{E}B$, $H\hat{A}D$.

Bài tập 12. Chứng minh rằng $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^0$, với các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ được cho trong hình vẽ.



Bài tập 13. Xác định $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E}$, với các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$, $\hat{E}$ được cho trong hình vẽ.



Bài tập 14. Chứng minh rằng với một tam giác bất kì, bao giờ cũng tồn tại một góc ngoài nhỏ hơn 120^0.

Bài tập 15. Cho ΔABC $\hat{B} - \hat{C} = 50^0$. Gọi Ax là tia phân giác ngoài của góc A. Chứng minh rằng Ax // BC.

Bài tập 16. Cho ΔABC có $\hat{B} = 3\hat{C}$. Vẽ tia Ax là tia đối của tia AC. Phân giác ngoài của góc A cắt BC tại E. Vẽ tia phân giác Ay của góc $E\hat{A}x$. Chứng minh rằng:

a. ΔAEC là tam giác cân.

b. Ay // BE.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. $\hat{C} = 50^0$.

b. $\hat{C} = 110^0$.

c. $\hat{C} = 102^0$.

d. $\hat{C} = 72^0$.

Bài tập 2. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 3.

a. Từ giả thiết:

$$\hat{B} - \hat{C} = 20^0 \Leftrightarrow B = 20^0 + \hat{C}.$$

Trong ΔABC, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow 100^0 + 20^0 + \hat{C} + \hat{C} = 180^0$$

$$\Leftrightarrow 2\hat{C} = 60^0 \Leftrightarrow \hat{C} = 30^0$$

Khi đó:

$$\hat{B} = 20^0 + \hat{C} = 20^0 + 30^0 = 50^0.$$

Vậy, ta tìm được $\hat{B} = 50^0$, $\hat{C} = 30^0$.

b. *Học sinh tự làm.*

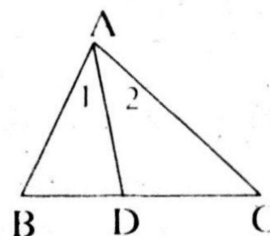
Bài tập 4. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 5.

a. Ta có:

$$\hat{A} = 180^0 - \hat{B} - \hat{C} = 180^0 - 80^0 - 30^0 = 70^0.$$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{1}{2}\hat{A} = 35^0.$$



Trong ΔACD, ta có:

$$A\hat{D}B = \hat{A}_2 + \hat{C} = 35^0 + 30^0 = 65^0.$$

$$A\hat{D}C = 180^0 - A\hat{D}B = 180^0 - 65^0 = 115^0.$$

Vậy ta nhận được $\hat{A} = 70^0$, $A\hat{D}B = 65^0$, $A\hat{D}C = 115^0$.

b. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 6. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 7. Trong ΔABC, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0.$$

Từ giả thiết ta có:

$$\frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{7} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{7} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{1 + 4 + 7} = \frac{180}{12} = 15^0.$$

Từ đó, suy ra:

$$\hat{A} = 15^0,\ \hat{B} = 60^0,\ \hat{C} = 105^0.$$

Vậy, ta được số đo các góc của tam giác là $\hat{A} = 15^0$, $\hat{B} = 60^0$, $\hat{C} = 105^0$.

Bài tập 8. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 9. Xét ΔAMC, có $\widehat{CMK}$ là góc ngoài đỉnh C nên:

$$\widehat{CMK} = \widehat{CAK} + \widehat{ACM} > \widehat{CAK}.$$

Vậy, ta luôn có $\widehat{CMK} > \widehat{CAK}$. (1)

Tương tự, ta cũng có $\widehat{BMK} > \widehat{BAK}$. (2)

Cộng theo vế (1), (2), ta được:

$$\widehat{CMK} + \widehat{BMK} > \widehat{CAK} + \widehat{BAK} \Leftrightarrow \widehat{CMB} > \hat{A} \Leftrightarrow \widehat{CMB} > 90^0.$$

Vậy, góc $\widehat{CMB}$ là góc tù.

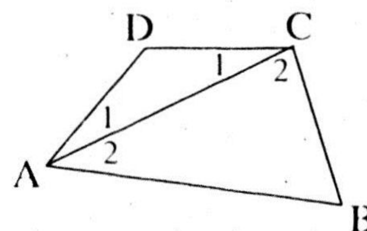
Bài tập 10. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 11. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 12. Nối AC, ta lần lượt xét các ΔABC và ΔADC.

- Trong ΔABC, ta có:

$$\hat{A}_2 + \hat{B} + \hat{C}_2 = 180^0. \quad (1)$$



- Trong ΔADC, ta có:

$$\hat{A}_1 + \hat{D} + \hat{C}_1 = 180^0. \quad (2)$$

Cộng theo vế (1) và (2), ta được:

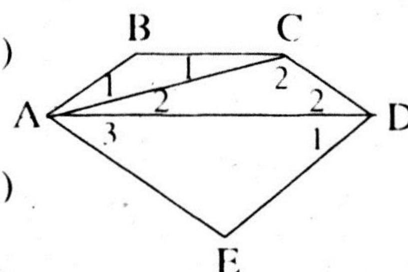
$$(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) + \hat{B} + \hat{D} + (\hat{C}_1 + \hat{C}_2) = 180^0 + 180^0$$

$$\Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^0, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 13. Nối AC, AD, ta lần lượt xét các ΔABC, ΔACD và ADE.

- Trong ΔABC, ta có:

$$\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C}_1 = 180^0. \quad (1)$$



- Trong ΔACD, ta có:

$$\hat{A}_2 + \hat{C}_2 + \hat{D}_2 = 180^0. \quad (2)$$

- Trong ΔADE, ta có:

$$\hat{A}_3 + \hat{D}_1 + \hat{E} = 180^0. \quad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2) và (3), ta được:

$$(\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3) + \hat{B} + (\hat{C}_1 + \hat{C}_2) + (\hat{D}_1 + \hat{D}_2) + \hat{E} = 180^0 + 180^0 + 180^0$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 480^0, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 14. *Sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng.*

Giả sử trái lại, tất cả các góc ngoài $\hat{A}_1$, $\hat{B}_1$, $\hat{C}_1$ của ΔABC đều lớn hơn 120^0, tức là:

$$\hat{A}_1 > 120^0 \Leftrightarrow 180^0 - \hat{A} > 120^0 \Leftrightarrow \hat{A} < 60^0, \quad (1)$$

$$\hat{B}_1 > 120^0 \Leftrightarrow 180^0 - B > 120^0 \Leftrightarrow \hat{B} < 60^0, \quad (2)$$

$$\hat{C}_1 > 120^0 \Leftrightarrow 180^0 - \hat{C} > 120^0 \Leftrightarrow \hat{C} < 60^0, \quad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3), ta được:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 60^0 + 60^0 + 60^0 = 180^0, \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy, với một tam giác bất kì, bao giờ cũng tồn tại một góc ngoài nhỏ hơn 120^0.

Bài tập 15. *Học sinh tự làm dựa trên hai góc so le trong bằng nhau.*

Bài tập 16. *Sử dụng kết quả trong phần các ví dụ minh hoạ.*

CHỦ ĐỀ 2

HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

> ***Định nghĩa**: Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau.*

Nếu có ΔABC bằng $\Delta A_1B_1C_1$, ta kí hiệu $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Như vậy:

$$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1 \Leftrightarrow \begin{cases} AB = A_1B_1,\ BC = B_1C_1,\ CA = C_1A_1 \\ \hat{A}_1 = \hat{A},\ B_1 = B,\ C_1 = C \end{cases}.$$

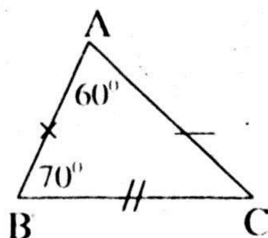
Chú ý: Khi viết $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, chúng ta cần hiểu ở đó có sự tương ứng giữa các đỉnh của hai tam giác với nhau, tức là không thể viết lại kí hiệu trên dưới dạng:

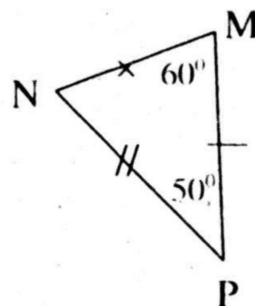
$$\Delta ABC = \Delta B_1A_1C_1,$$

và nếu muốn đảo đỉnh thì cần đảo cả hai vế của dấu bằng:

$$\Delta BAC = \Delta B_1A_1C_1.$$

Thí dụ 1. Hai tam giác trong hình sau có bằng nhau không ? Nếu có, hãy viết kí hiệu sự bằng nhau của hai tam giác đó.





Giải

Theo hình vẽ:

- Trong ΔABC, ta suy ra:

$$\hat{C} = 180^0 - \hat{A} - \hat{B} = 180^0 - 60^0 - 70^0 = 50^0.$$

- Trong ΔMNP, ta suy ra:

$$\hat{N} = 180^0 - \hat{M} - \hat{P} = 180^0 - 60^0 - 50^0 = 70^0.$$

Khi đó, với ΔABC và ΔMNP, ta có:

$AB = MN$, $BC = NP$, $CA = PM$ - Các cạnh bằng nhau

$\hat{A} = \hat{M}$, $\hat{B} = \hat{N}$, $\hat{C} = \hat{P}$ - Các góc bằng nhau

suy ra $\Delta ABC = \Delta MNP$.

Nhận xét: Qua thí dụ trên, ta thấy ngay được việc có thể giảm bớt một yếu tố giả thiết về góc mà hai tam giác vẫn bằng nhau. Điều này chính là lí do để chúng ta cần thiết đi xem xét " *Có bao nhiêu trường hợp bằng nhau của hai tam giác* ".

Thí dụ 2. Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$.

a. Viết đẳng thức trên dưới một dạng khác.

b. Biết $AB = 3cm$, $BC = 4cm$ và $MP = 5cm$. Tính chu vi của mỗi tam giác nói trên.

Giải

a. Ta có thể viết:

$\Delta ACB = \Delta MPN$ hoặc $\Delta BCA = \Delta NPM$.

b. Từ giả thiết:

$\Delta ABC = \Delta MNP$

$\Rightarrow MN = AB = 3cm$, $NP = BC = 4cm$ và $MP = AC = 5cm$.

Khi đó, chu vi của các tam giác ΔABC, ΔMNP được cho bởi:

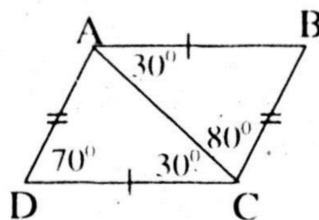
$CV_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = 3 + 4 + 5 = 12cm.$

$CV_{\Delta MNP} = MN + NP + PM = 3 + 4 + 5 = 12cm.$

Nhận xét: Qua thí dụ trên, ta thấy ngay " *Hai tam giác bằng nhau sẽ có chu vi bằng nhau* ".

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hình vẽ, chứng tỏ rằng hai tam giác ΔABC, ΔADC bằng nhau.



Giải

Theo hình vẽ:

- Trong ΔABC, ta suy ra:

$$\hat{B} = 180^0 - B\hat{A}C - A\hat{C}B = 180^0 - 30^0 - 80^0 = 70^0.$$

- Trong ΔMNP, ta suy ra:

$$D\hat{A}C = 180^0 - A\hat{C}D - \hat{D} = 180^0 - 30^0 - 70^0 = 80^0.$$

Khi đó, với ΔABC và ΔADC, ta có:

$AB = CD$, $BC = DA$, AC chung - Các cạnh bằng nhau

$C\hat{A}B = A\hat{C}D$, $\hat{B} = \hat{D}$, $A\hat{C}B = C\hat{A}D$ - Các góc bằng nhau

suy ra $\Delta ABC = \Delta CDA$.

Ví dụ 2: Cho ΔABC có $\hat{A} = 80^0$. Tính số đo của các góc $\hat{B}$, $\hat{C}$, biết rằng $\Delta ABC = \Delta ACB$.

Giải

Từ giả thiết:

$\Delta ABC = \Delta ACB \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$ (dựa trên sự tương ứng đỉnh)

Mặt khác, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow 80^0 + \hat{B} + \hat{B} = 180^0$$

$$\Leftrightarrow 2\hat{B} = 100^0 \Leftrightarrow \hat{B} = 50^0.$$

Vậy, ΔABC có $\hat{B} = \hat{C} = 50^0$.

Ví dụ 3: Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$. Biết có $\hat{A} = 80^0$, $N = 75^0$. Tính số đo các góc còn lại của mỗi tam giác.

Giải

Từ giả thiết:

$\Delta ABC = \Delta MNP$

suy ra:

$\hat{A} = \widehat{M} = 80^0$,

$\hat{B} = \widehat{N} = 75^0$,

$\hat{C} = \hat{P} = 180^0 - \widehat{M} - \widehat{N} = 180^0 - 80^0 - 75^0 = 25^0$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa hai tam giác bằng nhau.

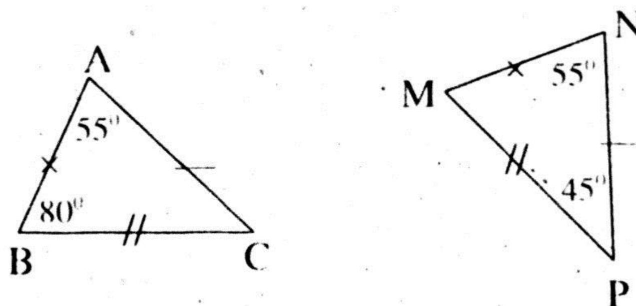
Câu hỏi 2: Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$, có thể viết lại dưới dạng $\Delta ABC = \Delta NMP$ được không ? Vì sao ?

Câu hỏi 3: Theo em, hai tam giác bằng nhau có cần nhất thiết phải chỉ ra ba góc tương ứng bằng nhau không ? Vì sao ?

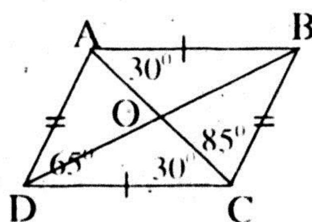
Câu hỏi 4: Chứng minh rằng nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có chu vi bằng nhau.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Hai tam giác trong hình sau có bằng nhau không ? Nếu có, hãy viết kí hiệu sự bằng nhau của hai tam giác đó.



Bài tập 2. Hãy chỉ ra các tam giác bằng nhau trong hình sau. Hãy viết kí hiệu sự bằng nhau của hai tam giác đó.



Bài tập 3. Tính các góc của ΔABC, biết $\Delta ABC = \Delta ACB = \Delta BCA$.

Bài tập 4. Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$. Biết có $\hat{A} = 30^0$, $N = 60^0$. Tính số đo các góc còn lại của mỗi tam giác.

Bài tập 5. Cho $\Delta ABC = \Delta ADC$.

a. Viết đẳng thức trên dưới một dạng khác và thử vẽ hình minh hoạ.

b. Biết AB = 6cm, DC = 8cm và AC = 10cm. Tính chu vi của mỗi tam giác nói trên.

Bài tập 6. Cho $\Delta ABC = \Delta CDA$.

a. Viết đẳng thức trên dưới một dạng khác và thử vẽ hình minh hoạ.

b. Biết AB = 8cm, AD = 15cm và AC = 16cm. Tính chu vi của mỗi tam giác nói trên.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Ta có $\Delta ABC = \Delta NMP$.

Bài tập 2. Ta có $\Delta ABC = \Delta CAD$, $\Delta BAD = \Delta DCB$...

Bài tập 3. Từ giả thiết:

$\Delta ABC = \Delta ACB \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$ (dựa trên sự tương ứng đỉnh)

$\Delta ACB = \Delta BCA \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$ (dựa trên sự tương ứng đỉnh)

Mặt khác, ta có:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{A} + \hat{A} = 180^0$

$\Leftrightarrow 3\hat{A} = 100^0 \Leftrightarrow \hat{A} = 60^0$.

Vậy, ΔABC có $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^0$.

Bài tập 4. Từ giả thiết:

$\Delta ABC = \Delta MNP$

suy ra:

$\hat{A} = \hat{M} = 30^0$,

$\hat{B} = \hat{N} = 60^0$,

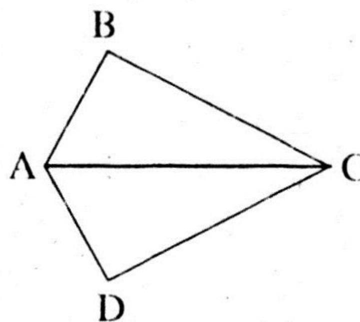
$\hat{C} = \hat{P} = 180^0 - \hat{M} - \hat{N} = 180^0 - 30^0 - 60^0 = 90^0$.

Bài tập 5.

a. Ta có thể viết:

$\Delta ACB = \Delta ACD$ hoặc $\Delta BCA = \Delta DCA$.

Khi đó, ta có thể minh hoạ theo hình vẽ:



b. Từ giả thiết:

$\Delta ABC = \Delta ADC$

$AB = AD = 6cm$, $BC = DC = 8cm$ và $AC = 10cm$

Khi đó, chu vi của các tam giác $\Delta ABC = \Delta ADC$ được cho bởi:

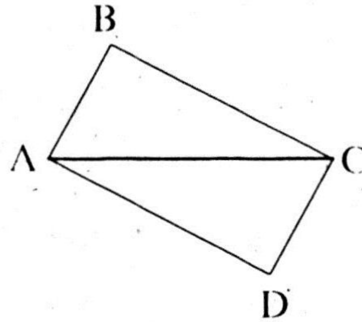
$CV_{\Delta ADC} = CV_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = 6 + 8 + 10 = 24cm$.

Bài tập 6.

a. Ta có thể viết:

$\Delta ACB = \Delta CAD$ hoặc $\Delta BCA = \Delta DAC$.

Khi đó, ta có thể minh hoạ theo hình vẽ:



b. Từ giả thiết:

$\Delta ABC = \Delta CDA$

$AB = CD = 8cm$, $AD = BC = 15cm$ và $AC = 16cm$

Khi đó, chu vi của các tam giác $\Delta ABC = \Delta ADC$ được cho bởi:

$CV_{\Delta CDA} = CV_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = 8 + 15 + 16 = 39cm.$

Trường hợp I

HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU CẠNH – CẠNH – CẠNH

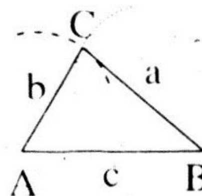
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. VẼ TAM GIÁC BIẾT BA CẠNH

Bài toán: *Vẽ ΔABC, biết AB = c, BC = a, AC = b.*

Cách vẽ

Ta lần lượt thực hiện:



- Vẽ đoạn thẳng AB = c.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ cung tròn tâm A bán kính b, vẽ cung tròn tâm B bán kính a. Hai cung tròn này cắt nhau tại C.
- Nối AC, BC, ta nhận được ΔABC thoả mãn giả thiết.

2. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CẠNH – CẠNH – CẠNH

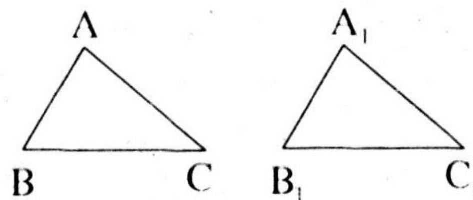
Ta thừa nhận kết quả:

Định lí: *Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.*

Như vậy, nếu hai tam giác ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ thoả mãn:

$AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$

$\Leftrightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$,



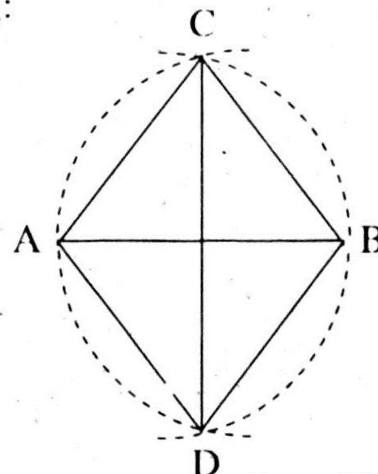
và khi đó ta có ngay:

$\widehat{A_1} = \widehat{A}$, $\widehat{B_1} = \widehat{B}$, $\widehat{C_1} = \widehat{C}$.

Thí dụ 1. Cho đoạn thẳng AB. Vẽ hai cung tròn tâm A, tâm B bán kính AB, chúng cắt nhau tại C và D. Chứng minh rằng:

a. ΔABC = ΔABD.

b. ΔACD = ΔBCD.



Giải

Theo cách dựng của giả thiết, ta có:

AB = AC = BC = AD = BD.

a. Ta có ngay :

ΔABC = ΔABD (c.c.c).

b. Ta có ngay :

$\Delta ACD = \Delta BCD$ (c.c.c).

Nhân xét:

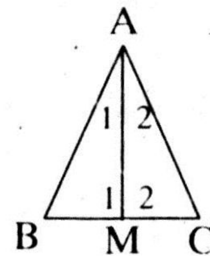
1. Như vậy, để chứng tỏ hai tam giác bằng nhau chúng ta chỉ cần khẳng định ba cặp cạnh bằng nhau mà không cần phải nêu ra đủ 6 yếu tố bằng nhau nữa (3 yếu tố cạnh và 3 yếu tố góc).
2. Bằng việc khẳng định được sự bằng nhau của hai tam giác chúng ta sẽ bắt đầu làm quen với việc chứng minh các tính chất trong tam giác, thí dụ sau sẽ minh hoạ điều này.

Thí dụ 2. Cho ΔABC có AB = AC. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng AM là đường trung trực của BC.

Giải

Để chứng minh AM là đường trung trực của BC, ta chỉ cần đi chứng minh $AH \perp BC$.

Xét hai tam giác ΔABM và ΔACM, ta có:



AB = AC, giả thiết

BM = CM, vì M là trung điểm BC

AM chung

suy ra:

$$\Delta ABM = \Delta ACM \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2.$$

Mặt khác, ta lại có:

$$\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 180^0 \Leftrightarrow \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 180^0 \Leftrightarrow 2\widehat{M}_1 = 180^0$$

$$\Leftrightarrow \widehat{M}_1 = 90^0 \Leftrightarrow AH \perp BC.$$

Vậy, AM là đường trung trực của BC.

Nhân xét: Cũng từ kết quả $\Delta ABM = \Delta ACM$, ta suy ra được:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \text{AM là đường phân giác của góc } \hat{A}.$$

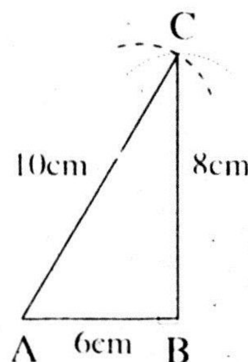
Như vậy, trong ΔABC có AB = AC (ΔABC cân tại A) thì AM vừa là trung tuyến, vừa là đường cao, vừa là đường trung trực, vừa là đường phân giác - *Đây chính là tính chất cơ bản của tam giác cân.*

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Vẽ ΔABC, biết AB = 6cm, BC = 8cm, CA = 10cm. Sau đó hãy thử đo góc $\widehat{B}$.

Giải

Ta lần lượt thực hiện:



- Vẽ đoạn thẳng AB = 6cm.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ cung tròn tâm A bán kính 10cm, vẽ cung tròn tâm B bán kính 8cm. Hai cung tròn này cắt nhau tại C.
- Nối AC, BC, ta nhận được ΔABC thoả mãn giả thiết.

Thực hiện phép đo, ta nhận được $\widehat{B} = 90^0$.

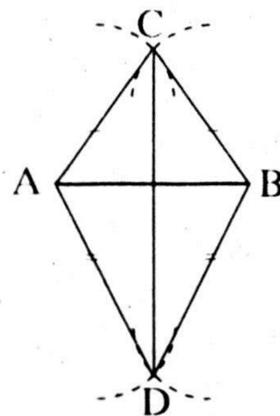
Ví dụ 2: Cho hai tam giác ΔABC, ΔABD, biết AB = 8cm, AC = BC = 6cm, AD = BD = 10cm và C, D nằm khác phía đối với AB.

a. Hãy vẽ ΔABC, ΔABD.

b. Chứng minh rằng $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$.

Giải

a. Ta lần lượt thực hiện:



Vẽ ΔABC:

- Vẽ đoạn thẳng AB = 8cm.
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ cung tròn tâm A bán kính 6cm, vẽ cung tròn tâm B bán kính 6cm. Hai cung tròn này cắt nhau tại C.
- Nối AC, BC, ta nhận được ΔABC thoả mãn giả thiết.

Vẽ ΔABD:

- Trên nửa mặt phẳng bờ AB khác phía với C, vẽ cung tròn tâm A bán kính 10cm, vẽ cung tròn tâm B bán kính 10cm. Hai cung tròn này cắt nhau tại D.
- Nối AD, BD, ta nhận được ΔABD thoả mãn giả thiết.

b. Xét hai tam giác ΔACD và ΔBCD, ta có:

AC = BC, AD = BD, CD chung

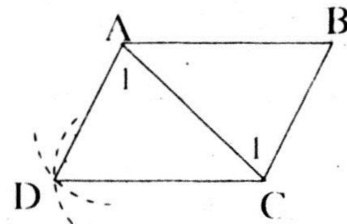
$\Rightarrow \Delta ACD$ và $\Delta BCD \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{CBD}$, đpcm.

Ví dụ 3: Cho ΔABC. Vẽ cung tròn tâm A bán kính BC, vẽ cung tròn tâm C bán kính BA, chúng cắt nhau tại D (D và B nằm khác phía đối với AC). Chứng minh rằng AD // BC.

Giải

Từ cách vẽ, ta nhận được:

AD = BC, CD = AB.



Xét hai tam giác ΔABC và ΔCDA, ta có:

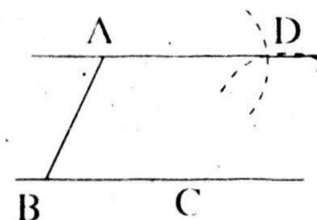
AB = CD, BC = DA, AC chung

⇒ ΔABC = ΔCDA

⇒ $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ ⇒ AD // BC, vì có hai góc so le trong bằng nhau.

Chú ý: Kết quả của ví dụ trên, cho phép chúng ta có thêm một phương pháp " *Dựng đường thẳng a đi qua điểm A và song song với đường thẳng d cho trước (A ∉ d)* ". Thật vậy:

- Lấy hai điểm B, C trên đường thẳng d.
- Vẽ cung tròn tâm A bán kính BC, vẽ cung tròn tâm C bán kính BA, chúng cắt nhau tại D (D và B nằm khác phía đối với AC).
- Khi đó, a chính là đường thẳng đi qua hai điểm A và D.

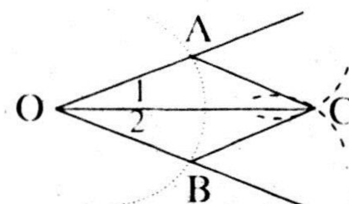


Ví dụ 4: Cho góc xÔy. Vẽ cung tròn tâm O, cung này cắt Ox, Oy theo thứ tự tại A và B. Vẽ các cung tròn tâm A và tâm B có cùng bán kính sao cho chúng cắt nhau tại điểm C. Nối O với C. Chứng minh rằng OC là tia phân giác của góc xÔy.

Giải

Từ cách vẽ, ta nhận được:

OA = OB, CA = CB.



Xét hai tam giác ΔOAC và ΔOBC, ta có:

OA = OB, CA = CB, OC chung

⇒ ΔOAC = ΔOBC

⇒ $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ ⇒ OC là tia phân giác của góc xÔy.

Chú ý: Kết quả của ví dụ trên, cho phép chúng ta có thêm một phương pháp " *Dựng đường phân giác của một góc* ". Thật vậy, để dựng tia phân giác của góc xÔy ta vẽ:

- Vẽ cung tròn tâm O, cung này cắt Ox, Oy theo thứ tự tại A và B.
- Vẽ các cung tròn tâm A và tâm B có cùng bán kính sao cho chúng cắt nhau tại điểm C.
- Nối O với C, ta được OC chính là tia phân giác của góc xÔy.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Trình bày các bước cần thực hiện để vẽ ΔABC khi biết độ dài ba cạnh.

Câu hỏi 2: Hai tam giác có ba cạnh bằng nhau thì có bằng nhau không ?

Câu hỏi 3: Nêu cách vẽ đường thẳng a đi qua điểm A và song song với đường thẳng d cho trước ($A \notin d$).

Câu hỏi 4: Nêu cách vẽ đường phân giác của góc xÔy cho trước.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Vẽ ΔABC, biết:

a. AB = 5cm, BC = 6cm, CA = 4cm.

b. AB = 3cm, BC = 4cm, CA = 5cm. Sau đó hãy thử đo góc $\widehat{B}$.

c. AB = AC = 6cm, BC = 8cm.

d. AB = BC = CA = 9cm. Sau đó hãy thử đo các góc.

Bài tập 2. Cho hai tam giác ΔABC, ΔABD, biết AB = 8cm, AC = BC = 4cm, AD = BD = 6cm.

a. Hãy vẽ ΔABC, ΔABD.

b. Chứng minh rằng $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$.

Bài tập 3. Cho AB = 6cm. Vẽ đường tròn tâm A bán kính 2cm và đường tròn tâm B bán kính bằng 6cm, chúng cắt nhau tại C và D. Chứng minh rằng AB là tia phân gíc của góc $\widehat{CAD}$.

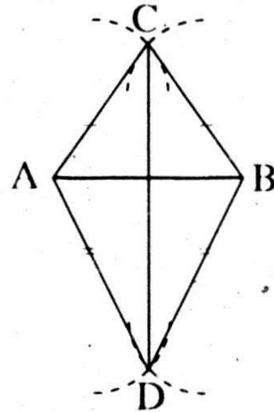
Bài tập 4. Cho ΔABC có $AB = AC$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng AM là đường phân giác của góc $\hat{A}$.

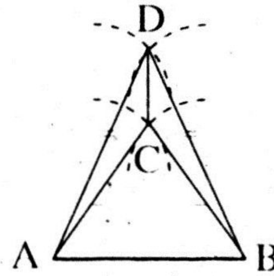
V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 2.

a. Ta có hai trường hợp hình:





b. Xét hai tam giác ΔACD và ΔBCD, ta có:

$AC = BC$, $AD = BD$, CD chung

$\Rightarrow \Delta ACD$ và $\Delta BCD \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{CBD}$, đpcm.

Trường hợp 2

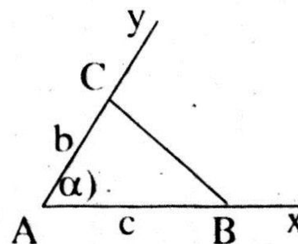
HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU CẠNH – GÓC – CẠNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. VẼ TAM GIÁC BIẾT HAI CẠNH VÀ GÓC XEN GIỮA

***Bài toán**: Vẽ ΔABC, biết $AB = c$, $AC = b$ và* $\widehat{BAC} = \alpha$.

Cách vẽ



Ta lần lượt thực hiện:

- Vẽ góc $x\hat{A}y = \alpha$.
- Trên tia Ax lấy điểm B sao cho AB = c.
- Trên tia Ay lấy điểm C sao cho AC = b.
- Nối BC, ta nhận được ΔABC thoả mãn giả thiết.

2. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CẠNH – GÓC – CẠNH

Ta thừa nhận kết quả:

***Định lí**: Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.*

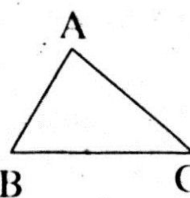
Như vậy, nếu hai tam giác ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ thoả mãn:

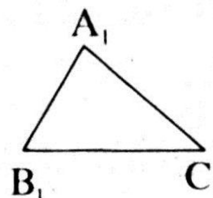
$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ và $\hat{A} = \hat{A}_1$

$\Leftrightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$,

và khi đó ta có ngay:

$\hat{B}_1 = \hat{B}$, $\hat{C}_1 = \hat{C}$ và $BC = B_1C_1$.





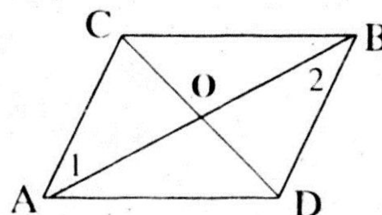
Thí dụ 1. Hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn thẳng. Chứng minh rằng:

a. $\Delta OAD = \Delta OBC$.

b. AC // BD.

Giải

a. Xét hai tam giác ΔOAD và ΔOBC, chúng có:



OA = OB, vì O là trung điểm AB

$A\hat{O}D = B\hat{O}C$ vì đối đỉnh

OD = OC, vì O là trung điểm CD

suy ra:

$\Delta OAD = \Delta OBC$ (c.g.c).

b. Xét hai tam giác ΔOAC và ΔOBD, chúng có:

$OA = OB$, vì O là trung điểm AB

$\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ vì đối đỉnh

$OC = OD$, vì O là trung điểm CD

suy ra:

$\Delta OAC = \Delta OBD$ (c.g.c) $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_2$

$\Rightarrow AC // BD$, vì có hai góc so le trong bằng nhau.

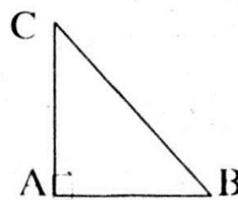
Ta biết rằng, với hai tam giác vuông chúng luôn có góc vuông bằng nhau, do đó ta nhận được một hệ quả từ định lí trên là:

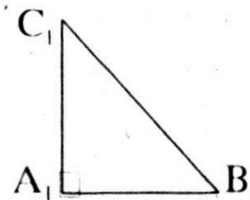
> ***Hệ quả**: Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.*

Như vậy, nếu ΔABC vuông tại A và $\Delta A_1B_1C_1$ vuông tại A_1 thoả mãn:

$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$

$\Leftrightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$,





và khi đó ta có ngay:

$\hat{B}_1 = \hat{B}$, $\hat{C}_1 = \hat{C}$ vµ $BC = B_1C_1$.

Thí dụ 2. Trên đường trung trực d của đoạn AB lấy điểm C bất lỳ. Chứng minh rằng:

a. $CA = CB$.

b. Đường thẳng d là phân giác của góc $\widehat{ACB}$.

Giải

Gọi H là trung điểm AB, suy ra $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^0$.

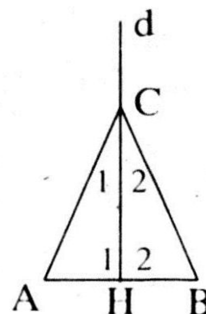
Xét hai tam giác vuông ΔHAC và ΔHBC, chúng có:

$HA = HB$

CH chung

suy ra:

$\Delta HAC = \Delta HBC$.



a. Từ kết quả trên ta có ngay:

$CA = CB$, đpcm.

b. Từ kết quả trên ta có ngay:

$\hat{C}_1 = \hat{C}_2 \Rightarrow$ d là phân giác của góc $\widehat{ACB}$, đpcm.

Nhận xét: Qua thí dụ trên, chúng ta ghi nhận kết quả:

" *Tập hợp các điểm cách đều hai điểm A, B cho trước là đường trung trực của AB* ".

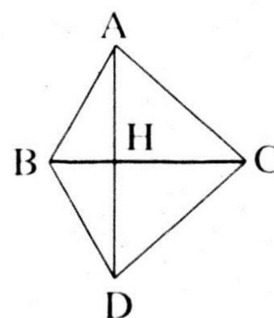
Thí dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc sử dụng tính chất này.

Thí dụ 3. Cho ΔABC có $\hat{A} = 80^0$, đường cao AH. Trên tia đối của tia HA, lấy điểm D sao cho HA = HD. Tính số đo của góc $\widehat{BDC}$

Giải

Từ giả thiết, suy ra BC là đường trung trực của AD nên:

BA = BD và CA = CD.



Xét hai tam giác ΔABC và ΔDBC, chúng có:

BA = BD

CA = CD

BC chung

suy ra:

$\Delta ABC = \Delta DBC$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{BDC} = \hat{A} = 80^0$.

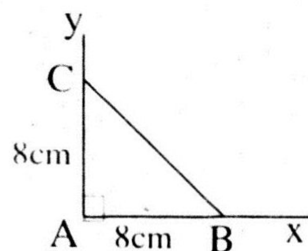
Vậy, ta tìm được $\widehat{BDC} = 80^0$.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Vẽ ΔABC, biết AB = AC = 8cm, $\hat{A} = 90^0$. Sau đó hãy thử đo góc $\hat{B}$, $\hat{C}$.

Giải

Ta lần lượt thực hiện:



- Vẽ góc $x\hat{A}y = 90^0$.
- Trên tia Ax lấy điểm B sao cho AB = 8cm.
- Trên tia Ay lấy điểm C sao cho AC = 8cm.
- Nối BC, ta nhận được ΔABC thoả mãn giả thiết.

Thực hiện phép đo, ta nhận được $\hat{B} = \hat{C} = 45^0$.

Yêu cầu: Các em học sinh hãy chứng minh rằng với ΔABC có giả thiết như trên thì $\hat{B} = \hat{C} = 45^0$.

Ví dụ 2: Cho ΔABC có $\hat{A} = \alpha$, BC > AB. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho BE = AB. Tia phân giác của gobs B cắt AC tại D.

a. So sánh độ dài AD và ED.

b. Tính số đo của góc $\widehat{BED}$.

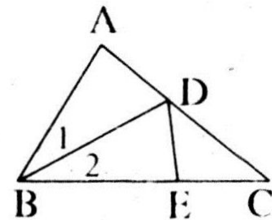
Giải

Xét hai tam giác ΔBAD và ΔBED, chúng có:

BA = BE, giả thiết

$\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, vì BD là phân giác của góc $\hat{B}$

BD chung



suy ra:

$\Delta BAD = \Delta BED$ (c.g.c)

$\Rightarrow AD = AE$ và $\widehat{BED} = \hat{A} = \alpha$.

Ví dụ 3: Cho ΔABC, trung tuyến AM. Trên tia AM lấy điểm D sao cho AD = 2AM. Chứng minh rằng:

a. AB // CD.

b. AC // BD.

Giải

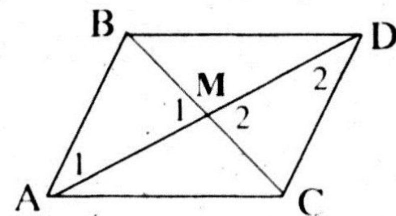
a. Chứng minh AB // CD.

Xét hai tam giác ΔMAB và ΔMDC, chúng có:

MB = MC, vì M là trung điểm BC

$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$, vì đối đỉnh

MA = MD, vì AD = 2AM



suy ra:

$\Delta MAB = \Delta MDC$ (c.g.c) $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_2$

$\Leftrightarrow$ AB // CD, vì có hai góc so le trong bằng nhau.

b. Chứng minh AC // BD — *Học sinh tự làm.*

Nhận xét: Qua hai ví dụ trên, chúng ta đã xét những trường hợp thấy ngay được sự bằng nhau của cặp góc xen giữa, tuy nhiên, trong nhiều trường hợp để có được điều này cần sử dụng một vài phép biến đổi góc. Ví dụ sau sẽ minh hoạ cho trường hợp này.

Ví dụ 4: Cho ΔABC. Vẽ đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AB (D, C khác phía đối với AB), vẽ đoạn thẳng AE vuông góc và bằng AC (E, B khác phía đối với AC). Chứng minh rằng:

a. $CD = BE$.

b. $CD \perp BE$.

Giải

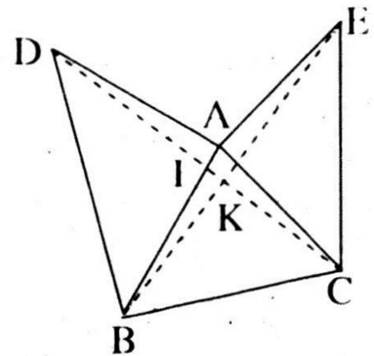
a. Xét hai tam giác ΔABE và ΔADC, chúng có:

$AB = AD$, giả thiết

$\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = \widehat{BAC} + 90^0$

$= \widehat{BAC} + \widehat{BAD} = \widehat{DAC}$

$AE = AC$, giả thiết



suy ra:

$\Delta ABE = \Delta ADC \Rightarrow BE = CD$, đpcm.

b. Giả sử CD cắt AB, BE theo thứ tự tại I, K.

Theo kết quả câu a), ta có $\widehat{ADI} = \widehat{IBK}$.

Trong Δ BIK, ta có:

$\widehat{IKB} = 180^0 - \widehat{IBK} - \widehat{KIB} = 180^0 - \widehat{ADI} - \widehat{AID} = \widehat{BAD} = 90^0$

$\Leftrightarrow CD \perp BE$, đpcm.

Ví dụ 5: Cho ΔABC, gọi D, E theo thứ tự là trung điểm của AC, AB. Trên tia BD lấy điểm M sao cho $BM = 2BD$, trên tia CE lấy điểm N sao cho E là trung điểm của CN. Chứng minh rằng $MN = 2BC$.

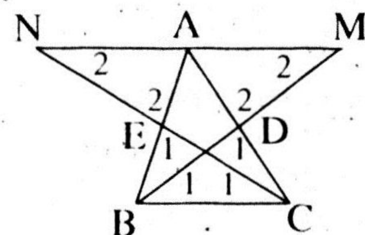
Giải

Xét hai tam giác ΔDAM và ΔDCB, chúng có:

$BD = MD$, vì $BM = 2BD$

$\widehat{D}_2 = \widehat{D}_1$, vì đối đỉnh

$DA = DC$, vì D là trung điểm của AC



suy ra:

$\Delta DAM = \Delta DCB$

từ đây, ta nhận được:

- $AM = BC$. (1)
- $\widehat{B}_1 = \widehat{M}_2 \Leftrightarrow AM \,//\, BC$, vì có hai góc so le trong bằng nhau. (2)

Xét hai tam giác ΔEAN và ΔEBC, chúng có:

NE = CE, vì E là trung điểm của CN

$\hat{E}_2 = \hat{E}_1$, vì đối đỉnh

EA = EB, vì E là trung điểm của AB

suy ra:

$\Delta EAN = \Delta EBC$

từ đây, ta nhận được:

- AN = BC. (3)
- $\widehat{C}_1 = \widehat{N}_2 \Leftrightarrow AN // BC$, vì có hai góc so le trong bằng nhau. (4)

Từ (2) và (4) suy ra:

Ba điểm M, A, N thẳng hàng theo thứ tự đó

$\Leftrightarrow MN = MA + AN = BC + BC = 2BC$, đpcm.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 2: Trình bày các bước cần thực hiện để vẽ ΔABC khi biết độ dài hai cạnh và số đo của góc xen giữa.

Câu hỏi 3: Hai tam giác có hai cạnh và góc xen giữa bằng nhau thì có bằng nhau không ?

Câu hỏi 4: Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó có bằng nhau không ? Vì sao ?

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Vẽ ΔABC, biết:

a. AB = 3cm, AC = 6cm và $\hat{A} = 60^0$.

b. AB = 6cm, AC = 8cm và $\hat{A} = 90^0$.

c. AB = AC = 4cm và $\hat{A} = 120^0$.

Bài tập 2. Cho ΔABC, đường cao AH. Trên tia đối của tia HA, lấy điểm D sao cho HA = HD. Tính số đo của góc $\widehat{BDC}$, biết:

a. $\hat{A} = 60^0$.

b. $\hat{A} = 90^0$.

Bài tập 3. Qua trung điểm M của đoạn thẳng AB, kẻ đường thẳng d vuông góc với AB. Lấy điểm C trên d. Chứng minh rằng CM là tia phân giác của góc $\widehat{ACB}$.

Bài tập 4. Cho ΔABC có $AB = AC$, tia phân giác của góc $\hat{A}$ cắt BC tại D. Chứng minh rằng:

a. $DB = DC$.

b. $AD \perp BC$.

Bài tập 5. Cho ΔABC có $\hat{B} = 2\hat{C}$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm K sao cho AB = CK. Tia phân giác của góc $\hat{B}$ cắt AC tại D, trên tia đối của tia BD lấy điểm E sao cho AC = BE. Chứng minh rằng AK = AE.

Bài tập 6. Cho ΔABC có $\hat{A} = 80^0$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho CD = CA. Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho CE = CB. Tính số đo của góc $\widehat{CDE}$.

Bài tập 7. Cho ΔABC có $\hat{A} = 90^0$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho BE = AB. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D.

a. So sánh độ dài AD và ED.

b. Tính số đo của góc $B\hat{E}D$.

Bài tập 8. Cho ΔABC. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho CD = AB. Các đường trung trực của AC và BD cắt nhau tại O. Chứng minh rằng:

a. $\Delta OAB = \Delta OCD$.

b. AO là tia phân giác của góc $\hat{A}$.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 2.

a. $B\hat{D}C = 60^0$.

b. $B\hat{D}C = 90^0$.

Bài tập 3. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 4. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 5. Xét hai tam giác ΔABE và ΔKCA, chúng có:

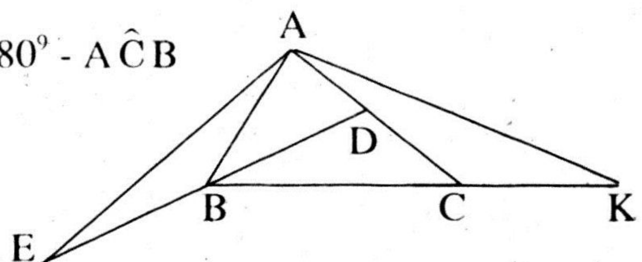
AB = KC, giả thiết

$A\hat{B}E = 180^0 - A\hat{B}D$

$= 180^0 - \frac{1}{2}\hat{B} = 180^0 - A\hat{C}B$

$= K\hat{C}A$

BE = CA, giả thiết



suy ra:

$\Delta ABE = \Delta KCA \Rightarrow AK = AE$, đpcm.

Bài tập 6. $\widehat{CDE} = 80^0$.

Bài tập 7. $AD = ED$ và $\widehat{BED} = 90^0$.

Bài tập 8. *Học sinh tự vẽ hình.*

a. Xét hai tam giác ΔOAB và ΔOCD, chúng có:

$OA = OC$, vì O thuộc đường trung trực của AC

$AB = CD$, giả thiết

$OB = OD$, vì O thuộc đường trung trực của BD

suy ra:

ΔOAB và ΔOCD (c.c.c).

b. *Học sinh tự làm.*

Trường hợp 3

HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU GÓC – CẠNH – GÓC

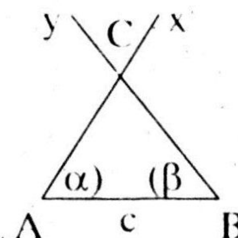
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. VẼ TAM GIÁC BIẾT CẠNH VÀ HAI GÓC KỀ

Bài toán: *Vẽ ΔABC, biết $AB = c$, $\hat{A} = \alpha$, $\hat{B} = \beta$.*

Cách vẽ

Ta lần lượt thực hiện:



- Vẽ đoạn thẳng $AB = c$
- Trên nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ hai tia Ax và By sao cho $x\hat{A}B = \alpha$, $A\hat{B}y = \beta$. Hai tia này cắt nhau tại C.
- Nối AC, BC, ta nhận được ΔABC thoả mãn giả thiết.

2. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU GÓC – CẠNH – GÓC

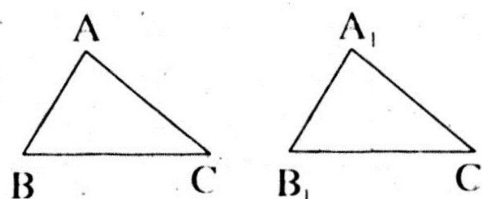
Ta thừa nhận kết quả:

Định lí: *Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.*

Như vậy, nếu hai tam giác ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ thoả mãn:

$AB = A_1B_1$, $\hat{A} = \hat{A}_1$ và $\hat{B} = \hat{B}_1$

$\Leftrightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$,



và khi đó ta có ngay:

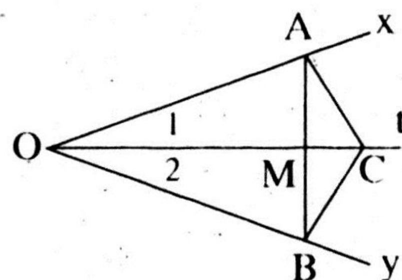
$\hat{C}_1 = \hat{C}$, $AC = A_1C_1$ và $BC = B_1C_1$.

Thí dụ 1. Cho góc $x\hat{O}y$. Vẽ tia phân giác Ot của góc $x\hat{O}y$, trên Ot lấy điểm M. Đường thẳng d qua M và vuông góc với Ot cắt Ox, Oy theo thứ tự tại A và B.

a. Chứng minh rằng OA = OB.

b. Lấy điểm C thuộc Ot, chứng minh rằng CA = CB và $O\hat{A}C = O\hat{B}C$

Giải



a. Xét hai tam giác ΔOAM và ΔOBM, ta có:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, vì Ot là tia phân giác của góc $x\hat{O}y$

OM chung

$\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^0$.

suy ra:

$\Delta OAM = \Delta OBM$ (g.c.g) $\Rightarrow OA = OB$, đpcm.

b. Xét hai tam giác ΔOAC và ΔOBC, ta có:

$OA = OB$, theo kết quả câu a)

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, vì Ot là tia phân giác của góc $x\hat{O}y$

OC chung

suy ra:

$\Delta OAC = \Delta OBC$ (c.g.c)

$\Rightarrow CA = CB$ và $O\hat{A}C = O\hat{B}C$, đpcm.

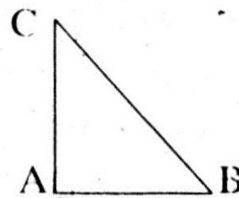
Ta biết rằng, với hai tam giác vuông chúng luôn có góc vuông bằng nhau, do đó ta nhận được một hệ quả từ định lí trên là:

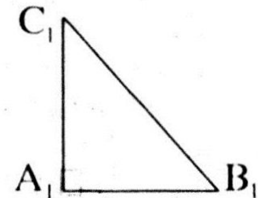
Hệ quả:

1. *Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.*
2. *Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.*

Như vậy, nếu ΔABC vuông tại A và $\Delta A_1B_1C_1$ vuông tại A_1.

Trường hợp 1: Nếu ta có:





$AB = A_1B_1$ và $\hat{B} = \hat{B}_1$

$\Leftrightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Trường hợp 2: Nếu ta có:

$AB = A_1B_1$ và $\hat{C} = \hat{C}_1 \Leftrightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Trường hợp 3: Nếu ta có:

$BC = B_1C_1$ và $\hat{B} = \hat{B}_1 \Leftrightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Trường hợp 4: Nếu ta có:

$BC = B_1C_1$ và $\hat{C} = \hat{C}_1 \Leftrightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Thí dụ sau sẽ minh hoạ việc sử dụng các hệ quả này.

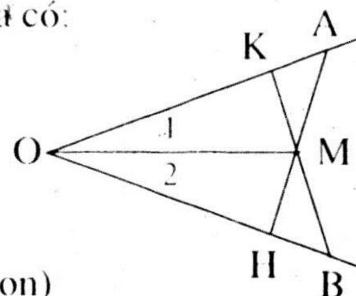
Thí dụ 2. Cho góc $x\hat{O}y$. Lấy các điểm A, B theo thứ tự thuộc Ox và Oy sao cho OA = OB. Vẽ AH vuông góc với Oy ($H \in Oy$), vẽ BK vuông góc với Ox ($K \in Ox$). Gọi M là giao điểm của AH và BK. Chứng minh rằng:

a. OH = OK.

b. OM là tia phân giác của góc $x\hat{O}y$.

Giải

a. Xét hai tam giác vuông ΔOAH và ΔOBK, ta có:



OA = OB, giả thiết

$\hat{O}$ chung

suy ra:

$\Delta OAH = \Delta OBK$ (cạnh huyền và góc nhọn)

$\Rightarrow$ OH = OK.

b. Xét hai tam giác vuông ΔOMH và ΔOMK, ta có:

OM chung

OH = OK

suy ra:

$\Delta OMH = \Delta OMK$ (cạnh huyền và cạnh góc vuông)

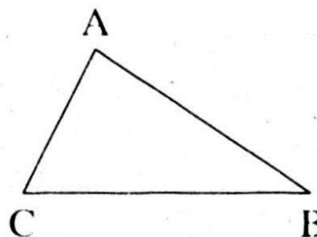
$\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Leftrightarrow$ OM là tia phân giác của góc $x\hat{O}y$.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Vẽ ΔABC, biết BC = 6cm, $\hat{B} = 30^0$, $\hat{C} = 60^0$. Sau đó hãy thử đo độ dài cạnh AC và đưa ra nhận xét.

Giải

Ta lần lượt thực hiện:

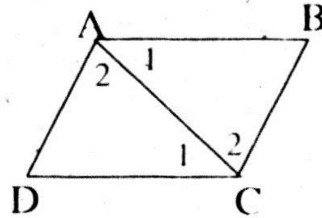


- Vẽ đoạn thẳng BC = 6cm
- Trên nửa mặt phẳng bờ BC, vẽ hai tia Bx và Cy sao cho $x\hat{B}C = 30^0$, $y\hat{C}B = 60^0$. Hai tia này cắt nhau tại C.
- Nối AC, BC, ta nhận được ΔABC thoả mãn giả thiết.

Thực hiện phép đo, ta nhận được AC = 3cm.

Nhận xét: Trong một tam giác vuông có một góc bằng 30^0 thì cạnh đối diện với góc 30^0 bằng một nửa cạnh huyền.

Ví dụ 2: Cho hình vẽ, ở đó AB // CD và AD // BC. Chứng minh rằng AB = CD và AD = BC.



Giải

Xét hai tam giác ΔABC và ΔCDA, ta có:

$\hat{A}_1 = \hat{C}_1$, vì AB // CD

AC chung

$\hat{A}_2 = \hat{C}_2$, vì AD // BC

suy ra:

ΔOAC = ΔOBC (g.c.g) ⇒ AB = CD và AD = BC, đpcm.

Ví dụ 3: Cho ΔABC có AB = AC. Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc AB, AC sao cho AD = AE. Gọi O là giao điểm của BE và CD. Chứng minh rằng:

a. BE = CD.

b. ΔOBD = ΔOCE.

Giải

a. Xét hai tam giác ΔABE và ΔACD, ta có:

AB = AC, giả thiết

$\hat{A}$ chung

AE = AD, giả thiết



suy ra:

ΔABE = ΔACD (c.g.c) ⇒ BE = CD, đpcm.

b. Xét hai tam giác ΔOBD và ΔOCE, ta có:

$\hat{B}_2 = \hat{C}_2$, theo kết quả câu a)

BD = AB — AD = AC — AE = CE, dựa theo giả thiết

$\widehat{BDO} = 180^0 - \hat{D}_2 = 180^0 - \hat{E}_2 = \widehat{CEO}$, dựa theo kết quả câu a)

suy ra:

ΔOBD = ΔOCE (g.c.g).

Ví dụ 4: Cho ΔABC ($AB < AC$), tia Ax đi qua trung điểm M của BC. Kẻ BE và CF vuông góc với Ax ($E, F \in Ax$). Chứng minh rằng $BE = CF$.

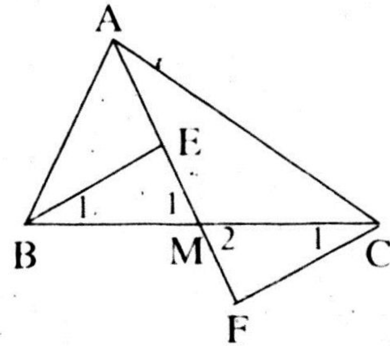
Giải

Ta có thể lựa chọn một trong các cách trình bày sau:

Cách 1: Sử dụng trường hợp bằng nhau g.c.g

Theo giả thiết:

$$\begin{cases} BE \perp Ax \\ CF \perp Ax \end{cases} \Rightarrow BE \,//\, CF.$$



Xét hai tam giác ΔMBE và ΔMCF, ta có:

$\hat{B}_1 = \hat{C}_1$, vì $BE \,//\, CF$

$MB = MC$, vì M là trung điểm BC

$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$, vì đối đỉnh

suy ra:

ΔMBE và ΔMCF (g.c.g) $\Rightarrow BE = CF$, đpcm.

Cách 2: Sử dụng hệ quả

Xét hai tam giác vuông ΔMBE vuông tại E và ΔMCF vuông tại F, ta có:

$MB = MC$, vì M là trung điểm BC — Cạnh huyền

$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$, vì đối đỉnh — Góc nhọn

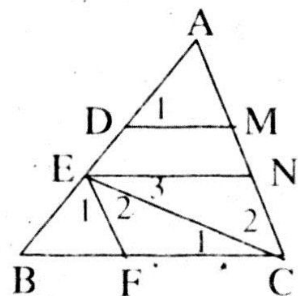
suy ra:

ΔMBE và ΔMCF (Cạnh huyền và góc nhọn) $\Rightarrow BE = CF$, đpcm.

Ví dụ 5: Cho ΔABC. Trên cạnh AB lấy các điểm D, E sao cho $AD = BE$. Qua D và E kẻ các đường thẳng song song với BC, chúng cắt AC theo thứ tự tại M và N. Chứng minh rằng $BC = DM + EN$.

Giải

Kẻ $EF \,//\, AC$ ($F \in BC$), nối E với C.



Xét hai tam giác ΔCEF và ΔECN, ta có:

$\hat{E}_2 = \hat{C}_2$, là hai góc so le trong của $EF \,//\, AC$

CE chung

$\hat{C}_1 = \hat{E}_3$, là hai góc so le trong của $EN \,//\, BC$

suy ra:

$\Delta CEF = \Delta ECN$ (g.c.g) $\Rightarrow EN = FC$. (1)

Xét hai tam giác ΔADM và ΔEBF, ta có:

$\hat{A} = \hat{E}_1$, là hai góc đồng vị của EF // AC

AD = BE, giả thiết

$\hat{D}_1 = \hat{B}$, là hai góc đồng vị của DM // BC

suy ra:

$\Delta ADM = \Delta EBF$ (g.c.g) $\Rightarrow$ DM = BF. (2)

Cộng theo vế (1), (2), ta được:

EN + DM = FC + BF = BC, đpcm.

Ví dụ 6: Cho ΔABC, gọi D, E theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Trên tia DE lấy điểm F sao cho DE = EF. Chứng minh rằng:

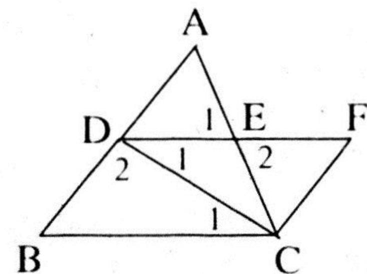
a. BD = CF.

b. $\Delta BCD = \Delta FDC$.

c. $DE \overset{//}{=} \frac{1}{2} BC$ (đọc là DE song song và bằng một phần hai BC).

Giải

a. Xét hai tam giác ΔADE và ΔCFE, ta có:



AE = CE, vì E là trung điểm AC

$\hat{E}_1 = \hat{E}_2$, vì đối đỉnh

DE = FE, vì E là trung điểm DF

suy ra:

$\Delta ADE = \Delta CFE$ (c.g.c) $\Rightarrow$ CF = AD = BD, vì D là trung điểm AC

b. Từ kết quả câu a), suy ra:

$A\hat{D}E = E\hat{F}C \Rightarrow$ AB // CF.

Xét hai tam giác ΔBCD và ΔFDC, ta có:

BD = FC, theo kết quả câu a)

$\hat{D}_2 = D\hat{C}F$, là hai góc so le trong của AB // CF

CD chung

suy ra:

$\Delta BCD = \Delta FDC$ (c.g.c)

c. Từ kết quả câu b), suy ra:

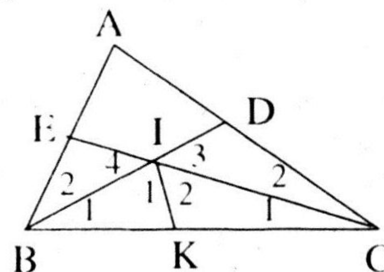
$\hat{D}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow DE // BC.$

$DE = \frac{1}{2} DF = \frac{1}{2} BC.$

Ví dụ 7: Cho ΔABC có $\hat{A} = 60^0$. Các phân giác BD và CE cắt nhau tại I. Chứng minh rằng ID = IE.

Giải

Từ giả thiết về các phân giác BD và CE, ta được:



$$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{1}{2}\hat{B}, \quad \hat{C}_1 = C_2 = \frac{1}{2}\hat{C}.$$

suy ra:

$$\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}) = \frac{1}{2}(180^0 - \hat{A})$$

$$= \frac{1}{2}(180^0 - 60^0) = 60^0.$$

$$\Rightarrow \hat{I}_3 = \hat{I}_4 = \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 60^0.$$

Trong ΔIBC kẻ phân giác IK, ta nhận thấy:

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_2 = \frac{1}{2} B\hat{I}C = \frac{1}{2}(180^0 - \hat{I}_3) = \frac{1}{2}(180^0 - 60^0) = 60^0.$$

Xét hai tam giác ΔICD và ΔICK, ta có:

$\hat{I}_3 = \hat{I}_2 = 60^0$

IC chung

$\hat{C}_1 = \hat{C}_2$

suy ra:

$\Delta ICD = \Delta ICK$ (g.c.g) $\Rightarrow$ ID = IK. (1)

Chứng minh tương tự, ta nhận được IE = IK. (2)

Từ (1), (2) suy ra ID = IE.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Trình bày các bước cần thực hiện để vẽ ΔABC khi biết cạnh và hai góc kề.

Câu hỏi 2: Hai tam giác có một cạnh và hai góc kề bằng nhau thì có bằng nhau không ?

Câu hỏi 3: Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó có bằng nhau không ? Vì sao ?

Câu hỏi 4: Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó có bằng nhau không ? Vì sao ?

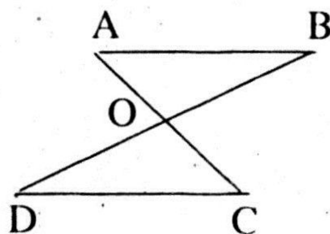
IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Vẽ ΔABC, biết:

a. $AB = 6cm$, $\hat{A} = 60^0$, $\hat{B} = 30^0$. Sau đó hãy thử đo độ dài cạnh AC và đưa ra nhận xét.

b. $AB = 8\sqrt{2}$ cm, $\hat{A} = \hat{B} = 45^0$. Sau đó hãy thử đo độ dài cạnh AC, BC và đưa ra nhận xét.

Bài tập 2. Cho hình vẽ, ở đó AB // CD và AB = CD. Chứng minh rằng O là trung điểm của mỗi đoạn thẳng AC và BD.



Bài tập 3. Cho đoạn thẳng AB. Qua A, B vẽ hai đường thẳng a, b vuông góc với AB. Đường thẳng qua trung điểm O của AB cắt a, b theo thứ tự tại A_1, B_1.Hãy so sánh các độ dài AA_1 và BB_1.

Bài tập 4. Cho ΔABC. Các tia phân giác của các góc A và B cắt nhau tại I. Vẽ $IM \perp AB$ $(M \in AB)$, $IN \perp BC$ $(N \in BC)$, $IP \perp AC$ $(P \in AC)$. Chứng minh rằng IM = IN = IP.

Bài tập 5. Cho ΔABC có $\hat{B} = \hat{C}$. Tia phân giác góc $\hat{A}$ cắt BC tại D. Chứng minh rằng AB = AC và DA = DB.

Bài tập 6. Cho ΔABC có $\hat{B} = \hat{C}$. Tia phân giác của góc B cắt AC tại E, tia phân giác của góc C cắt AB tại F. Chứng minh rằng BF = CE và BE = CF.

Bài tập 7. Cho ΔABC có $\hat{A} = 90^0$. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D. Chứng minh rằng AB = BE.

Bài tập 8. Cho ΔABC có AB = 5cm, BC = 6cm, AC = 8cm. Qua các điểm A, B, C kẻ các đường thẳng a, b, c theo thứ tự song song với BC, AC, AB. Giả sử a cắt b, c theo thứ tự tại E, F. Giả sử b cắt c tại D. Tính chu vi của các tam giác ΔABC, ΔABE, ΔBCD, ΔACF, ΔDEF.

Bài tập 9. Cho góc $x\hat{O}y$. Lấy các điểm A, B thuộc Ox sao cho OA > OB. Lấy các điểm C, D thuộc Oy sao cho OC = OA và OD = OB. Gọi E là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng:

a. AD = BC.

b. $\Delta ABE = \Delta CDE$.

c. OE là tia phân giác của góc $x\hat{O}y$.

Bài tập 10. Cho ΔABC, gọi D là trung điểm AB. Đường thẳng qua D song song với BC cắt AC tại E, đường thẳng qua E song song với AB cắt BC tại F. Chứng minh rằng :

a. AD = EF.

b. $\Delta ADE = \Delta EFC$.

c. AE = EC.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 2. Xét hai tam giác ΔOAB và ΔOCD, ta có:

$\hat{A} = \hat{C}$, vì là hai góc so le trong của AB // CD

AB = CD, giả thiết

$\hat{B} = \hat{D}$, vì là hai góc so le trong của AB // CD

suy ra:

$\Delta OAB = \Delta OCD$ (g.c.g) $\Rightarrow$ OA = OC và OB = OD = IK

$\Leftrightarrow$ O là trung điểm của mỗi đường.

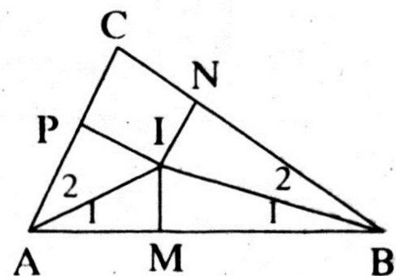
Bài tập 3. $AA_1 = BB_1$ do $\Delta OAA_1 = \Delta OBB_1$ (g.c.g)

Bài tập 4. Ta lần lượt xét:

- Xét hai tam giác vuông ΔIBM vuông tại M và ΔIBN vuông tại N, ta có:

  IB chung

  $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, vì BI là tia phân giác



suy ra:

$\Delta IBM = \Delta IBN$ (cạnh huyền và góc nhọn) $\Rightarrow$ IM = IN. (1)

- Xét hai tam giác vuông ΔIAM vuông tại M và ΔIAP vuông tại P, ta có:

  IA chung

  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, vì AI là tia phân giác

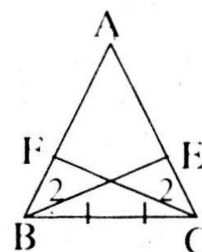
suy ra:

$\Delta IAM = \Delta IAP$ (cạnh huyền và góc nhọn) $\Rightarrow IM = IP$. (2)

Từ (1), (2) suy ra IM = IN = IP, đpcm.

Bài tập 5. *Học sinh tự làm* — Lời giải trong chủ đề tam giác cân.

Bài tập 6. Xét hai tam giác ΔBCF và ΔCBE, ta có:



$\hat{B} = \hat{C}$, giả thiết

BC chung

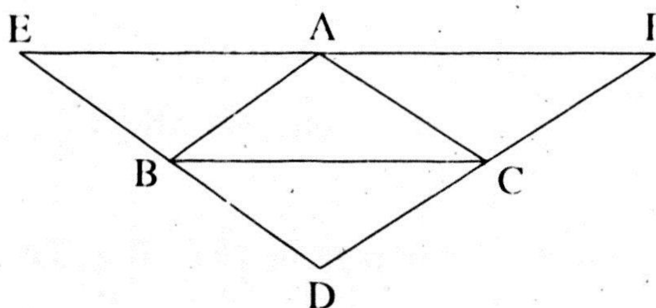
$\hat{C}_1 = \frac{1}{2}\hat{C} = \frac{1}{2}\hat{B} = \hat{B}_1$

suy ra:

$\Delta BCF = \Delta CBE$ (g.c.g) $\Rightarrow BF = CE$ và $BE = CF$, đpcm.

Bài tập 7. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 8.



Dựa trên sự bằng nhau trong trường hợp g.c.g ta suy ra được ngay các tam giác ΔABC, ΔABE, ΔBCD, ΔACF bằng nhau, do đó:

$$CV_{\Delta ABC} = CV_{\Delta ABE} = CV_{\Delta BCD} = CV_{\Delta ACF} = AB + BC + AC$$

$$= 5 + 6 + 8 = 19\text{cm}.$$

Trong ΔDEF, ta có:

$$DE = DB + BE = AC + AC = 2AC = 2.8 = 16\text{cm}$$

$$EF = EA + AF = BC + BC = 2BC = 2.6 = 12\text{cm}$$

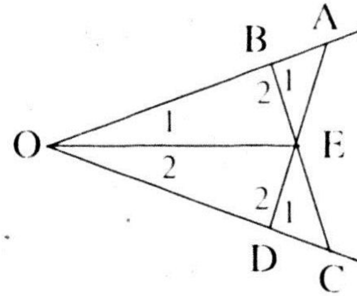
$$DF = DC + CF = AB + AB = 2AB = 2.5 = 10\text{cm}$$

suy ra:

$$CV_{\Delta DEF} = DE = EF + DF = 16 + 12 + 10 = 38\text{cm}.$$

Bài tập 9.

a. Xét hai tam giác ΔOAD và ΔOCB, ta có:



$OA = OC$, giả thiết

$\hat{O}$ chung

$OD = OB$, giả thiết

suy ra:

$\Delta OAD = \Delta OCB$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = BC$.

b. Xét hai tam giác ΔABE và ΔCDE, ta có:

$\hat{A} = \hat{C}$, theo kết quả câu a)

$AB = OA - AB = OC — OD = CD$, dựa theo giả thiết

$\hat{B}_1 = 180^0 - \hat{B}_2 = 180^0 - \hat{D}_2 = \hat{D}_1$, dựa theo kết quả câu a)

suy ra:

$\Delta ABE = \Delta CDE$ (g.c.g)

c. Xét hai tam giác ΔAOE và ΔCOE, ta có:

$OA = OC$, giả thiết

$\hat{A} = \hat{C}$, theo kết quả câu a)

$AE = CE$, theo kết quả câu b)

suy ra:

ΔAOE và ΔCOE (c.g.c) $\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$

$\Leftrightarrow$ OE là tia phân giác của góc $x\hat{O}y$.

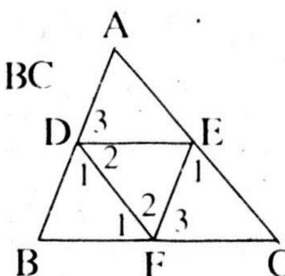
Bài tập 10.

a. Nối D với F. Xét hai tam giác ΔBDF và ΔEFD, ta có:

$\hat{D}_1 = \hat{F}_2$, vì là hai góc so le trong của AB // EF

DF chung

$\hat{F}_1 = \hat{D}_2$, vì là hai góc so le trong của DE // BC



suy ra:

$\Delta BDF = \Delta EFD$ (g.c.g)

$\Rightarrow EF = BD = AD$, do D là trung điểm AB

b. Xét hai tam giác ΔADE và ΔEFC, ta có:

$\hat{A} = \hat{E}_1$, vì là hai góc đồng vị của AB // EF

AD = EF, theo kết quả câu a)

$\hat{F}_3 = \hat{B} = \hat{D}_3$, vì là hai góc đồng vị của AB // EF tiếp tới là hai góc đồng vị của BC // DE

suy ra:

ΔADE = ΔEFC (g.c.g).

c. Theo kết quả câu b) suy ra AE = EC.

CHỦ ĐỀ 3

TAM GIÁC CÂN

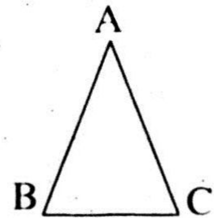
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Ta có định nghĩa của tam giác cân:

> ***Tam giác cân*** *là tam giác có hai cạnh bằng nhau.*

Với ΔABC cân tại A, ta nói:



- AB, AC gọi là hai *cạnh bên* (AB = AC) và BC là *cạnh đáy*.
- Các góc $\hat{B}$, $\hat{C}$ là hai *góc ở đáy* và $\hat{A}$ là *góc ở đỉnh*.

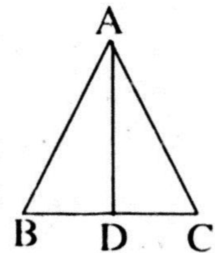
2. TÍNH CHẤT

Để xây dựng tính chất của tam giác cân, chúng ta có thể bắt đầu với thí dụ sau:

Thí dụ 1: Cho ΔABC cân tại A. Chứng minh rằng $\hat{B} = \hat{C}$.

Giải

Dựng tia phân giác của góc $\hat{A}$ cắt BC ở D.



Xét hai tam giác ΔADB và ΔADC, ta có:

AB = AC, vì ΔABC cân tại A

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, vì AD là đường phân giác góc $\hat{A}$

AD chung

Suy ra:

$$\Delta ADB = \Delta ADC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}.$$

Vậy, ta có kết quả:

> *Trong tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.*

Điều ngược lại cũng đúng, tức là ta có kết quả:

> *Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.*

Thật vậy, giả sử ΔABC có $\hat{B} = \hat{C}$, ta cần chứng minh AB = AC.

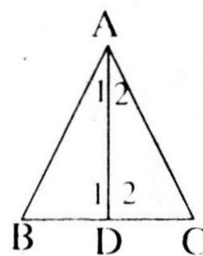
Vẽ tia phân giác góc $\hat{A}$, cắt BC tại D.

Xét hai tam giác ΔADB và ΔADC, ta có:

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, vì AD là đường phân giác góc $\hat{A}$

AD chung

$\hat{D}_1 = 180^0 - \hat{A}_1 - \hat{B} = 180^0 - \hat{A}_2 - \hat{C} = \hat{D}_2$



Suy ra:

$\Delta ADB = \Delta ADC$ (g.c.g) $\Rightarrow AB = AC \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân .

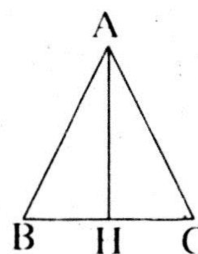
<u>**Thí dụ 2:**</u> Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

a. Nếu đường cao AH đồng thời là đường trung tuyến thì ΔABC cân tại A.

b. Nếu ΔABC cân tại A thì đường trung tuyến AH cũng đồng thời là đường cao.

Giải

a. Trong ΔABC, ta có:



- Vì AH là đường cao nên:

  $A\hat{H}B = A\hat{H}C = 90^0$.

- Vì AH là trung tuyến nên:

  HB = HC.

Xét hai tam giác ΔAHB và ΔAHC, ta có:

HB = HC

$A\hat{H}B = A\hat{H}C = 90^0$

AH chung

suy ra:

$\Delta AHB = \Delta AHC$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = AC \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

b. Ta có nhận xét:

- Vì ΔABC cân tại A nên:

  AB = AC và $\hat{B} = \hat{C}$.

- Vì AH là trung tuyến nên:

  HB = HC.

Xét hai tam giác ΔAHB và ΔAHC, ta có:

AB = AC

$\hat{B} = \hat{C}$

HB = HC

suy ra:

$\Delta AHB = \Delta AHC$ (c.g.c) $\Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2$.

Mặt khác:

$$\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^0 \Leftrightarrow 2\hat{H}_1 = 180^0 \Leftrightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^0$$

$\Leftrightarrow$ AH là đường cao.

Chú ý: 1. Từ đây, chúng ta có thêm được một tính chất là " *Nếu một tam giác có đường cao đồng thời là đường trung tuyến thì tam giác đó là tam giác cân* ".

2. Các em học sinh hãy chứng minh thêm các tính chất:

- *Nếu một tam giác có đường cao đồng thời là đường phân giác thì tam giác đó là tam giác cân.*
- *Nếu một tam giác có đường phân giác đồng thời là đường trung tuyến thì tam giác đó là tam giác cân.*
- *Trong tam giác cân hai phân giác (đường cao, trung tuyến) ứng với hai cạnh bên thì bằng nhau.* Hãy thử xem điều ngược lại có đúng không ?
- *Nếu ΔABC cân tại A thì* $\hat{B} < 90^0$ - Hãy thử nêu ý nghĩa của tính chất này.

Ta có định nghĩa của tam giác vuông cân:

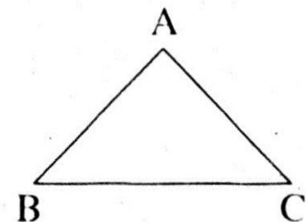
> ***Tam giác vuông cân*** *là tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau.*

Như vậy, với ΔABC vuông cân tại A, ta có:

$AB = AC$,

$\hat{A} = 90^0$,

$\hat{B} = \hat{C} = 45^0$.



Thí dụ 3: Cho ΔABC vuông cân tại A. Vẽ đường thẳng a qua điểm A sao cho B và C thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ a. Vẽ BH, CK vuông góc với a (H, K $\in$ a). Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng:

a. AH = CK.

b. HK = BH + CK.

c. ΔMHK vuông cân.

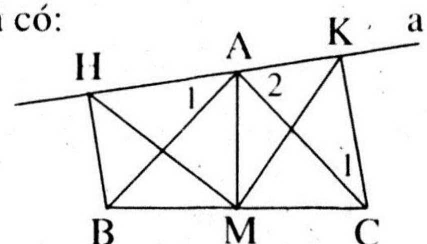
Giải

a. Xét hai tam giác vuông ΔAHB và ΔCKA, ta có:

$AB = AC$, giả thiết

$\hat{A}_1 = 180^0 — B\hat{A}C - \hat{A}_2$

$= 180^0 — 90^0 — (90^0 - \hat{C}_1) = \hat{C}_1$



suy ra:

$\Delta AHB = \Delta CKA$ (cạnh huyền và góc nhọn)

$\Rightarrow H\hat{B}A = \hat{A}_2$, $BH = AK$ và $AH = CK$, đpcm.

b. Ta có ngay:

$HK = AK + AH = BH + CK$, đpcm.

c. Xét hai tam giác ΔMHB và ΔMKA, ta có:

$BH = AK$, theo kết quả a)

$H\hat{B}M = H\hat{B}A + A\hat{B}M = \hat{A}_2 + 45^0 = K\hat{A}M$

$MB = \dfrac{1}{2}BC = MA$, trung tuyến thuộc cạnh huyền

suy ra:

ΔMHB và ΔMKA (c.g.c)

từ đó:

$MH = MK \Rightarrow \Delta MHK$ cân.

$B\widehat{M}H = A\widehat{M}K$

$\Rightarrow H\widehat{M}K = H\widehat{M}A + A\widehat{M}K = H\widehat{M}A + B\widehat{M}H = B\widehat{M}A = 90^0$.

Vậy, ΔMHK vuông cân.

3. TAM GIÁC ĐỀU

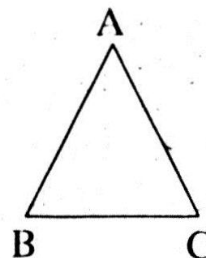
***Tam giác đều** là tam giác có ba cạnh bằng nhau.*

Để xây dựng tính chất của tam giác đều, chúng ta có thể bắt đầu với thí dụ sau:

Thí dụ 4: Cho ΔABC đều. Chứng minh rằng $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^0$.

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:



Cách 1: Dựa trên tính chất của tam giác cân

Vì ΔABC đều nên ta lần lượt có:

$BC = AC \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại $C \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B}$.

$AB = BC \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại $B \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{C}$.

Mặt khác, ta lại có:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{A} + \hat{A} = 180^0 \Leftrightarrow 3\hat{A} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{A} = 60^0$.

Vậy, ΔABC có $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^0$.

Cách 2: Trình bày theo sự tương ứng đỉnh của các tam giác bằng nhau

Từ giả thiết:

$\Delta ABC = \Delta ACB$ (c.c.c) $\Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$ (dựa trên sự tương ứng đỉnh)

$\Delta ACB = \Delta BCA$ (c.c.c) $\Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$ (dựa trên sự tương ứng đỉnh)

Mặt khác, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{A} + \hat{A} = 180^0 \Leftrightarrow 3\hat{A} = 100^0 \Leftrightarrow \hat{A} = 60^0.$$

Vậy, ΔABC có $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^0$.

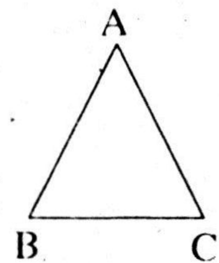
Từ đó, ta có kết quả:

> *Trong tam giác đều, mỗi góc bằng 60^0.*

<u>Thí dụ 5:</u> Cho ΔABC có $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác đều.

Giải

Từ giả thiết ta lần lượt có:



$\hat{A} = \hat{B} \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C $\Leftrightarrow CA = CB$.

$\hat{B} = \hat{C} \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại A $\Leftrightarrow AB = AC$.

Từ đó, suy ra:

$AB = BC = CA \Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

Vậy, ta có kết quả:

> *Một tam giác có ba góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.*

<u>Nhận xét</u>: Trong trường hợp ΔABC cân tại A có một góc bằng 60^0 thì nó cũng là tam giác đều, bởi:

Nếu $\hat{A} = 60^0$ thì:

$$\hat{B} + \hat{C} = 180^0 - \hat{A} \Leftrightarrow 2\hat{B} = 180^0 - 60^0 \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{C} = 60^0$$

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ là tam giác đều}$$

Vậy, ta có kết quả:

"Một tam giác cân có một góc bằng 60^0 thì tam giác đó là tam giác đều".

Tóm lại, với chúng ta có được các kết quả sau:

> 1. *Trong tam giác đều, mỗi góc bằng 60^0.*
> 2. *Một tam giác có ba góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.*
> 3. *Một tam giác cân có một góc bằng 60^0 thì tam giác đó là tam giác đều.*

Thí dụ 6: Cho ba điểm A, C, B thẳng hàng theo thứ tự đó. Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ AB, vẽ các tam giác đều ACD, BCE. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của AE và BD. Chứng minh rằng ΔCIK là tam giác đều.

Giải

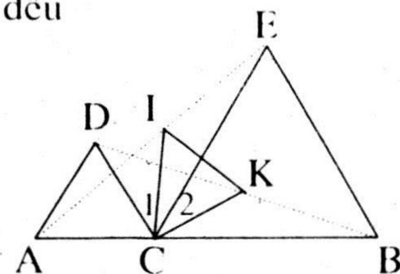
Xét ΔACE và ΔDCB, ta có:

AC = DC, vì chúng là cạnh của tam giác đều

$\widehat{ACE} = \widehat{ACD} + \widehat{DCE} = 60^0 + \widehat{DCE}$

$= \widehat{BCE} + \widehat{DCE} = \widehat{DCB}$

CE = CB, vì chúng là cạnh của tam giác đều



suy ra:

ΔACE = ΔDCB (c.g.c)

⇒ hai trung tuyến tương ứng CI = CK.

Mặt khác, ta có nhận xét:

$\widehat{DCE} = 180^0 - \widehat{ACD} - \widehat{BCE} = 180^0 - 60^0 - 60^0 = 60^0$.

$\hat{C}_1 = \hat{C}_2$.

⇒ $\widehat{DCK} = 60^0$.

Vậy, ΔCIK là tam giác cân có một góc bằng 60^0 nên nó là tam giác đều.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC cân tại A. Gọi Ax là tia phân giác của góc ngoài đỉnh A. Chứng minh rằng Ax // BC.

Giải

Ta có thể trình lựa chọn một trong ba cách trình bày sau:

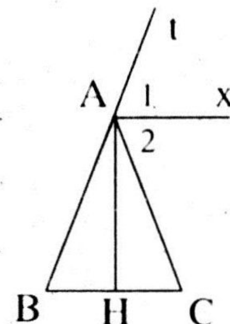
Cách 1: Sử dụng góc đồng vị.

Vì ΔABC cân tại A nên $\hat{B} = \hat{C}$.

Vì Ax là tia phân giác ngoài của góc $\hat{A}$ nên:

$\hat{A}_1 = \frac{1}{2}\widehat{tAC} = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}) = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{B}) = \hat{B}$

⇒ Ax // BC vì có hai góc đồng vị bằng nhau.



Cách 2: Sử dụng góc so le trong.

Vì ΔABC cân tại A nên $\hat{B} = \hat{C}$.

Vì Ax là tia phân giác ngoài của góc $\hat{A}$ nên:

$$\hat{A}_2 = \frac{1}{2} t\hat{A}C = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}) = \frac{1}{2}(\hat{C} + \hat{C}) = \hat{C}$$

$\Rightarrow$ Ax // BC vì có hai góc so le trong bằng nhau.

Cách 3: Sử dụng tính chất đường cao của tam giác vuông.

Vẽ đường cao AH, suy ra;

AH $\perp$ BC

AH cũng là phân giác của góc $\hat{A}$.

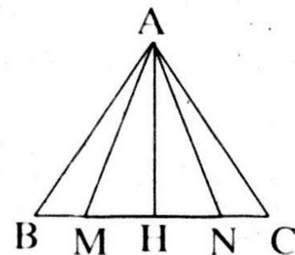
Ta có ngay AH $\perp$ Ax (tính chất hai đường phân giác trong và phân giác ngoài).

Vậy, Ax // BC vì cùng vuông góc với AH.

Ví dụ 2: Cho ΔABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy các điểm M, N sao cho BM = CN. Chứng minh rằng ΔAMN là tam giác cân.

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:



Cách 1: Sử dụng định nghĩa.

Vì ΔABC cân tại A nên:

AB = AC và $\hat{B} = \hat{C}$.

Khi đó, hai tam giác ΔABM và ΔCAN, ta có:

AB = AC

$\hat{B} = \hat{C}$

BM = CN, giả thiết

suy ra:

ΔABM và $\Delta CAN \Rightarrow AM = AN \Leftrightarrow \Delta AMN$ cân tại A.

Cách 2: Sử dụng tính chất.

Gọi AH là đường cao của ΔABC, suy ra HB = HC.

Từ giả thiết BM = CN suy ra HM = HN.

Khi đó, ΔAMN có đường cao AH cũng là trung tuyến do đó nó là tam giác cân.

Ví dụ 3: Cho ΔABC cân. Tính số đo của các góc $\hat{B}$, $\hat{C}$, biết:

a. $\hat{A} = 120^0$.

b. $\hat{A} = 30^0$.

Giải

a. Nhận xét rằng, với $\hat{A} = 120^0$ thì ΔABC chỉ có thể cân tại A (bởi nếu trái lại, nó cân tại B chẳng hạn thì $\hat{C} = 120^0$ suy ra $\hat{A} + \hat{C} = 240^0 > 180^0$, mâu thuẫn), do đó:

$$\hat{B} = \hat{C} = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2} = 90^0 - 60^0 = 30^0.$$

b. Ta xét ba trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu ΔABC cân tại A thì

$$\hat{B} = \hat{C} = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2} = 90^0 - 15^0 = 75^0.$$

Trường hợp 2: Nếu ΔABC cân tại C thì

$$\hat{B} = \hat{A} = 30^0$$

$$\hat{C} = 180^0 - \hat{A} - \hat{B} = 180^0 - 30^0 - 30^0 = 120^0.$$

Trường hợp 3: Nếu ΔABC cân tại B thì

$$\hat{C} = \hat{A} = 30^0$$

$$\hat{B} = 180^0 - \hat{A} - \hat{C} = 180^0 - 30^0 - 30^0 = 120^0.$$

Nhận xét: Như vậy, ta cần thấy rằng " *Với ΔABC cân có một góc bằng α* " ta có nhận xét:

1. Nếu $0 < \alpha < 90^0$ thì sẽ có hai trường hợp:

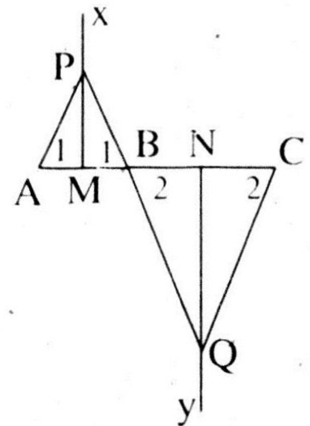
   Trường hợp 1: Khi α là góc ở đỉnh thì góc ở đáy bằng
   $$90^0 - \frac{\alpha}{2}.$$
   Trường hợp 2: Khi α là góc ở đáy thì góc ở đỉnh bằng
   $$180^0 - 2\alpha.$$

2. Nếu $90^0 \le \alpha < 180^0$ thì α là góc ở đỉnh và khi đó góc ở đáy bằng $90^0 - \frac{\alpha}{2}$.

Ví dụ 4: Cho ba điểm thẳng hàng A, B, C theo thứ tự đó. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, BC. Kẻ các tia Mx, Ny thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AC sao cho Mx ⊥ AB và Ny ⊥ BC. Một đường thẳng qua B cắt Mx, Ny theo thứ tự tại P, Q. Chứng minh rằng AP // CQ.

Giải

Nhận xét rằng:



- Vì Mx là trung trực của AB nên:

  PA = PB ⇔ ΔPAB cân tại P

  $\Leftrightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$.

- Vì Ny là trung trực của BC nên:

  QB = QC ⇔ ΔQBC cân tại Q

  $\Leftrightarrow \hat{C}_2 = \hat{B}_2$.

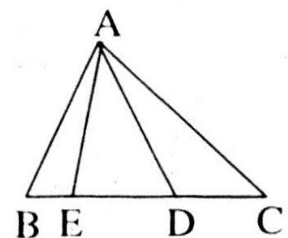
Mặt khác, ta lại có:

$\hat{B}_1 = B_2$, vì đối đỉnh

$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_2 \Leftrightarrow$ AP // CQ, vì có hai góc so le trong bằng nhau.

Ví dụ 5: Cho ΔABC cân tại A. Lấy các điểm D, E thuộc cạnh BC sao cho BD = BA và CA = CE. Tính số đo góc DÂE, biết $\hat{A} = 80^0$.

Giải



Trong ΔADE, ta có:

$$D\hat{A}E = 180^0 - A\hat{E}D - A\hat{D}E. \qquad (1)$$

Từ giả thiết, ta lần lượt thấy:

- Vì BD = BA nên ΔABD cân tại B, do đó:

$$A\hat{D}E = 90^0 - \frac{1}{2}\hat{B}. \qquad (2)$$

- Vì CA = CE nên ΔACE cân tại C, do đó:

$$A\hat{E}D = 90^0 - \frac{1}{2}\hat{C}. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

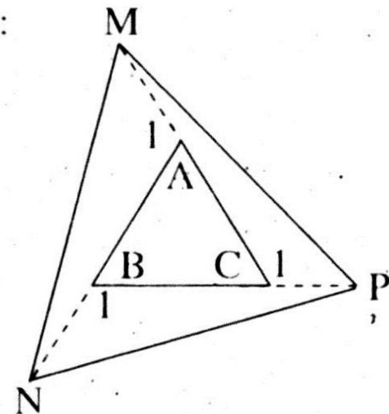
$$D\hat{A}E = 180^0 - (90^0 - \frac{1}{2}\hat{B}) - (90^0 - \frac{1}{2}\hat{C}) = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C})$$

$$= \frac{1}{2}(180^0 - \hat{A}) = \frac{1}{2}(180^0 - 80^0) = 50^0.$$

Chú ý: Rất nhiều học sinh mắc phải lỗi vẽ hình khi thực hiện ví dụ này và lỗi đó xuất phát từ sự tuỳ tiện về độ dài (cần nhớ rằng AB + AC > BC).

Ví dụ 6: Cho ΔABC đều. Lấy các điểm M, N, P theo thứ tự thuộc các tia đối của các tia AC, BA, CB, sao cho AM = BN = CP. Chứng minh rằng ΔMNP là tam giác đều.

Giải



Xét ba tam giác ΔAMN, ΔBNP, ΔCPM, ta có:

AM = BN = CP, giả thiết

$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = 180^0 - 60^0 = 120^0$

AN = BP = CM = AM + AC

suy ra:

$\Delta AMN = \Delta BNP = \Delta CPM$

$\Rightarrow$ MN = NP = PM

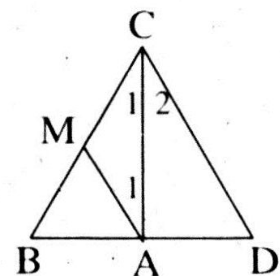
$\Leftrightarrow$ ΔMNP là tam giác đều.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng trong một tam giác vuông có một góc bằng 30^0 thì cạnh góc vuông đối diện với góc 30^0 bằng một phần hai cạnh huyền.

Giải

Giả sử ΔABC vuông tại A có $\hat{C} = 30^0$, ta cần đi chứng minh $AB = \frac{1}{2}BC$.

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:



Cách 1: Trên BC lấy điểm M sao cho AB = MB

$\Rightarrow$ ΔABM là tam giác cân

$\Rightarrow$ ΔABM là tam giác đều vì có $\hat{B} = 60^0$

$\Leftrightarrow$ AB = BM = MA.

Trong ΔMAC, ta có:

$\hat{A}_1 = 90^0 - 60^0 = 30^0 = \hat{C}_1 \Leftrightarrow \Delta MAC$ cân tại M $\Leftrightarrow$ MA = MC.

Khi đó:

$BC = BM + CM = AB + AB \Leftrightarrow AB = \frac{1}{2}BC$. đpcm.

Cách 2: Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho AB = AD.

Nhận xét rằng ΔBCD có đường cao CA cũng là đường trung tuyến nên:

ΔBCD là tam giác cân $\Rightarrow$ ΔBCD là tam giác đều vì có $\hat{B} = 60^0$

Khi đó:

$$BC = BD = 2AB \Leftrightarrow AB = \frac{1}{2}BC. \text{ đpcm.}$$

Nhận xét: Qua ví dụ trên, chúng ta thu nhận được một kết quả:

" *Trong một tam giác vuông có một góc bằng 30^0 thì cạnh đối diện với góc 30^0 bằng bằng nửa cạnh huyền và ngược lại*".

Chúng ta sẽ trình bày thêm một ví dụ để minh hoạ việc sử dụng tính chất này.

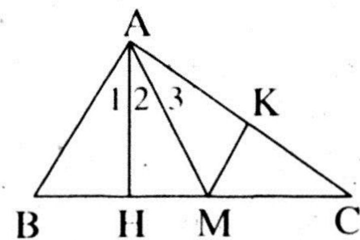
Ví dụ 8: Cho ΔABC, có đường cao AH và trung tuyến AM chia góc $\hat{A}$ thành 3 góc bằng nhau. Tính số đo các góc của ΔABC.

Giải

Lấy điểm K trên cạnh AC sao cho AK = AH.

Trong ΔABM có đường cao AH cũng là đường phân giác nên

$$\Delta ABM \text{ cân tại } A \Rightarrow MH = \frac{1}{2}BM.$$



Xét hai tam giác ΔAHM, ΔAKM, ta có:

AH = AK

$\hat{A}_2 = \hat{A}_3$, giả thiết

AM chung

suy ra:

$$\Delta AHM = \Delta AKM$$

$$\Rightarrow A\hat{K}M = A\hat{H}M = 90^0 \text{ và } MK = MH = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}MC.$$

Trong ΔKMC vuông tại K, ta có:

$$MK = \frac{1}{2}MC \Leftrightarrow \hat{C} = 30^0$$

$$\Rightarrow H\hat{A}C = 90^0 - 30^0 = 60^0 \Rightarrow \hat{A} = \frac{3}{2}H\hat{A}C = 90^0$$

$$\Rightarrow \hat{B} = 180^0 - \hat{A} - \hat{C} = 180^0 - 90^0 - 30^0 = 60^0.$$

Nhân xét: Qua ví dụ trên, chúng ta thu nhận được một kết quả:

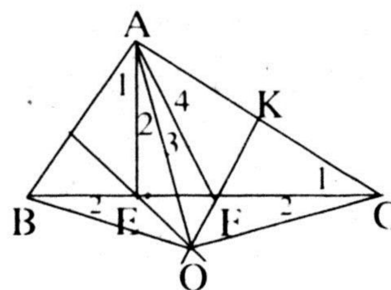
" *Trong một tam giác vuông có một góc bằng 30⁰ thì các đường cao, đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh góc vuông sẽ chia góc vuông thành ba phần bằng nhau và ngược lại*".

Ví dụ 9: Cho ΔABC. Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại C và BC theo thứ tự tại E, F. Chứng minh rằng:

a. OB = OC.

b. AO là tia phân giác của góc $E\hat{A}F$.

Giải



a. Ta lần lượt có:

- Vì O thuộc trung trực của AB nên:

  OA = OB. (1)

- Vì O thuộc trung trực của AC nên:

  OA = OC. (2)

Từ (1), (2) suy ra OB = OC, đpcm.

b. Theo kết quả câu a), ta có:

$OB = OC \Leftrightarrow \Delta OBC$ cân tại O $\Leftrightarrow \hat{B}_2 = \hat{C}_2$.

Tiếp theo, ta lần lượt có:

- $\Delta OAE = \Delta OBE$ vì OA = OB, EA = EB và OE chung, suy ra:

  $\hat{B}_2 = \hat{A}_2$. (3)

- $\Delta OAF = \Delta OCF$ vì OA = OC, FA = FC và OF chung, suy ra:

  $\hat{C}_2 = \hat{A}_3$. (4)

Từ (3), (4) suy ra:

$\hat{A}_2 = \hat{A}_3 \Leftrightarrow$ AO là tia phân giác của góc $E\hat{A}F$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa tam giác cân.

Câu hỏi 2: Phát biểu và chứng minh các tính chất của tam giác cân.

Câu hỏi 3: Phát biểu định nghĩa tam giác vuông cân.

Câu hỏi 4: Phát biểu định nghĩa tam giác đều.

Câu hỏi 5: Phát biểu và chứng minh các tính chất của tam giác đều.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho hai góc kề bù xOz và zOy. Vẽ các tia Om, On theo thứ tự là các tia phân giác của các góc xOz và zOy. Lấy các điểm A, B theo thứ tự thuộc Ox, Oz sao cho OA = OB. AB cắt tia Om tại I. Chứng minh rằng:

a. $Om \perp On$.

b. $AB \perp OI$.

c. AB // On

Bài tập 2. Cho ΔABC cân. Tính số đo của các góc $\hat{B}$, $\hat{C}$, biết:

a. $\hat{A} = 160^0$.

b. $\hat{A} = 90^0$.

c. $\hat{A} = 36^0$.

Bài tập 3. Cho ΔABC vuông cân tại A. Vẽ tam giác cân ADC (DA = DC), với góc ở đáy bằng 15^0 vào phía trong ΔABC. Vẽ tam giác đều ΔABE ở phía ngoài ΔABC. Chứng minh rằng ba điểm C, D, E thẳng hàng.

Bài tập 4. Cho ΔABC, phân giác AD. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho AB = AE. Chứng minh rằng AD // CE.

Bài tập 5. Cho ΔABC có BC = 2AB. Gọi M là trung điểm của BC và D là trung điểm của BM. Trên tia AD lấy điểm E sao cho AE = 2AD. Chứng minh rằng:

a. $\Delta MAE = \Delta MAC$.

b. AC = 2AD.

Bài tập 6. Cho ΔABC cân tại A. Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc AB, AC sao cho AD = AE. Gọi O là giao điểm của BE và CD. Chứng minh rằng:

a. BE = CD.

b. DE // BC.

c. $\Delta OBD = \Delta OCE$.

Bài tập 7. Cho ΔABC cân tại A. Lấy các điểm D, E thuộc cạnh BC sao cho BD = BA và CA = CE. Tính số đo góc $D\hat{A}E$, biết: .

a. $\hat{A} = 120^0$.

b. $\hat{A} = 90^0$.

c. $\hat{A} = 60^0$.

Bài tập 8. Cho ΔABC đều. Lấy điểm D trên cạnh BC sao cho $BC = 3BD$. Vẽ DE vuông góc với BC ($E \in AB$), vẽ DF vuông góc với AC ($F \in AC$). Chứng minh rằng ΔDEF là tam giác đều.

Bài tập 9. Cho ΔABC cân tại A có $\hat{A} = 100^0$. Trong góc C vẽ tia Cx sao cho $B\hat{C}x = 30^0$, tia này cắt phân giác của góc B tại E. Vẽ tam giác đều BCD (D và A thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ BC).

a. Chứng minh rằng DA là tia phân giác của góc $B\hat{D}C$.

b. Tính số đo của góc $A\hat{E}B$.

Bài tập 10. Cho ΔABC. Vẽ phía ngoài ΔABC các tam giác vuông cân ở A là ΔABD và ΔACE. Vẽ AH vuông góc với BC, đường thẳng AH cắt DE ở K. Vẽ DM và EN vuông góc với AH ($M, N \in AH$). Chứng minh rằng:

a. $DM = EN$.

b. $DK = EK$.

c. Biết ΔABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng CD vuông góc và bằng BE.

Bài tập 11. Cho ΔABC có hai góc B, C nhọn. Vẽ phía ngoài ΔABC các tam giác vuông cân ΔABD (cân tại B) và ΔACE (cân tại C). Vẽ DI và EK vuông góc với BC ($I, K \in BC$). Chứng minh rằng:

a. $BI = CK$.

b. $BC = ID + EK$.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 2.

a. Nhận xét rằng, với $\hat{A} = 160^0$ thì ΔABC chỉ có thể cân tại A (bởi nếu trái lại, nó cân tại B chẳng hạn thì $\hat{C} = 160^0$ suy ra $\hat{A} + \hat{C} = 320^0 > 180^0$, mâu thuẫn), do đó:

$$\hat{B} = \hat{C} = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2} = 90^0 - 80^0 = 10^0.$$

b. Nhận xét rằng, với $\hat{A} = 90^0$ thì ΔABC chỉ có thể cân tại A (bởi nếu trái lại, nó cân tại B chẳng hạn thì $\hat{C} = 90^0$ suy ra $\hat{A} + \hat{C} = 180^0$, mâu thuẫn), do đó:

$$\hat{B} = \hat{C} = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2} = 90^0 - 45^0 = 45^0.$$

c. Ta xét ba trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu ΔABC cân tại A thì

$$\hat{B} = \hat{C} = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2} = 90^0 - 18^0 = 72^0.$$

Trường hợp 2: Nếu ΔABC cân tại C thì

$$\hat{B} = \hat{A} = 36^0$$

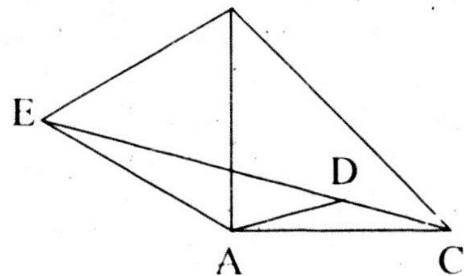
$$\hat{C} = 180^0 - \hat{A} - \hat{B} = 180^0 - 36^0 - 36^0 = 102^0.$$

Trường hợp 3: Nếu ΔABC cân tại B thì

$$\hat{C} = \hat{A} = 36^0$$

$$\hat{B} = 180^0 - \hat{A} - \hat{C} = 180^0 - 36^0 - 36^0 = 102^0.$$

Bài tập 3. Từ giả thiết, ta được $A\hat{C}D = 15^0$.



Xét ΔACE, ta có:

AC = AB, vì ΔABC cân tại A

AE = AB, vì ΔABE đều

suy ra:

AC = AE ⇔ ΔACE cân tại A.

Khi đó:

$$A\hat{C}E = A\hat{E}C = \frac{1}{2}(180^0 - C\hat{A}E) = \frac{1}{2}[180^0 - (E\hat{A}B + B\hat{A}C)]$$

$$= \frac{1}{2}[180^0 - (60^0 + 90^0)] = 15^0.$$

Vậy, ta nhận thấy:

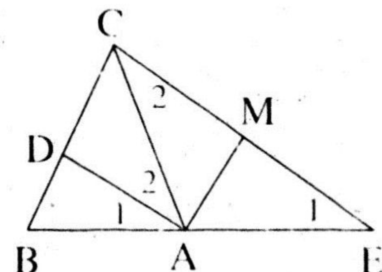
$$A\hat{C}D = A\hat{C}E = 15^0 \Rightarrow C, D, E \text{ thẳng hàng.}$$

Bài tập 4. *Hướng dẫn:* có thể sử dụng một trong các cách sau:

Cách 1: Chứng minh hai góc đồng vị bằng nhau.

Cách 2: Chứng minh hai góc so le trong bằng nhau.

Cách 3: Gọi M là trung điểm của CE, chứng minh AD và CE cùng vuông góc với AM.



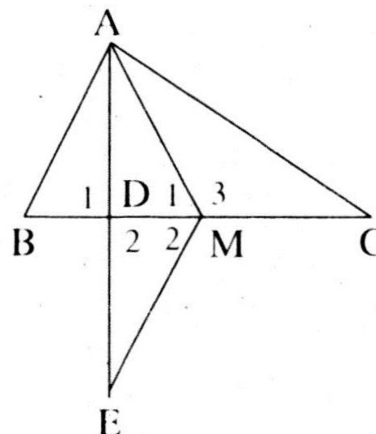
Bài tập 5.

a. Xét hai tam giác ΔDAB, ΔDEM, ta có:

$AD = ED$, giả thiết $AE = 2AD$

$\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$, vì đối đỉnh

$BD = MD$, vì D là trung điểm của BM



suy ra:

$\Delta DAB = \Delta DEM$

$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{M}_2$

và $ME = AB = BM = MC$.

Xét hai tam giác ΔMAE, ΔMAC, ta có:

AM chung

$A\widehat{M}E = \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = M\hat{A}B + \widehat{B} = \widehat{M}_3$

$ME = MC$

suy ra:

$\Delta MAE = \Delta MAC$, dpcm.

b. Theo kết quả câu a), suy ra

$AC = AE = 2AD$, dpcm.

Bài tập 6.

a. *Học sinh tự làm.*

b. Từ giả thiết:

- Vì ΔABC cân tại A nên:

$$\widehat{B} = \widehat{C} = 90^0 - \frac{1}{2}\hat{A}.$$



- ΔADE có $AD = AE$ nên cân tại A, suy ra:

$$\widehat{D}_1 = \hat{E}_1 = 90^0 - \frac{1}{2}\hat{A}.$$

Suy ra:

$\widehat{B} = \widehat{D}_1 \Rightarrow BC // CD$ do có hai góc đồng vị bằng nhau.

c. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 7.

a. 30^0.

b. 45^0.

c. 60^0.

Bài tập 8. Ta lần lượt có:

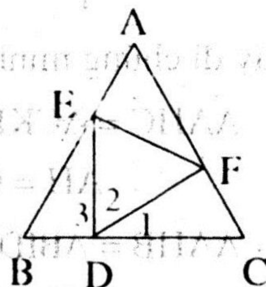
- ΔBDE vuông tại D có :

$$\hat{B} = 60^0 \Rightarrow \hat{D}_3 = 30^0 \Rightarrow BE = 2BD = CD.$$

- ΔCDF vuông tại F có :

$$\hat{C} = 60^0 \Rightarrow \hat{D}_1 = 30^0 \Rightarrow CD = 2CF \Rightarrow CF = BD.$$

Xét hai tam giác ΔEBD, ΔCDF, ta có:



$EB = CD$

$\hat{B} = \hat{D}$

$BD = CF$

suy ra:

$$\Delta EBD = \Delta CDF \Rightarrow DE = DF \Rightarrow \Delta DEF \text{ cân tại D.}$$

Mặt khác, ta lại có:

$$\hat{D}_2 = 180^0 - \hat{D}_1 - \hat{D}_3 = 180^0 - 30^0 - 90^0 = 60^0.$$

Vậy, ΔDEF cân có một góc bằng 60^0 nên nó là tam giác đều.

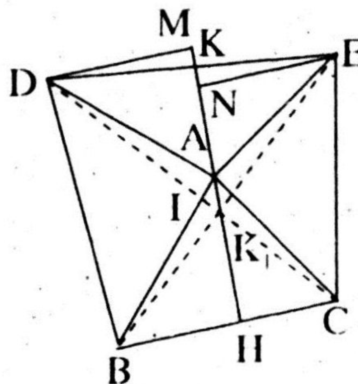
Bài tập 9. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 10.

a. *Học sinh tự làm.*

b. *Học sinh tự làm.*

c. Xét hai tam giác ΔABE và ΔADC, chúng có:



$AB = AD$, giả thiết

$B\hat{A}E = B\hat{A}C + C\hat{A}E = B\hat{A}C + 90^0$

$= B\hat{A}C + B\hat{A}D = D\hat{A}C$

$AE = AC$, giả thiết

suy ra:

$$\Delta ABE = \Delta ADC \Rightarrow BE = CD, \text{ dpcm.}$$

Giả sử CD cắt AB, BE theo thứ tự tại I, K_1.

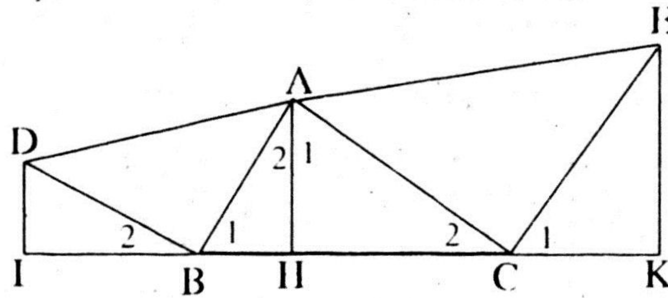
Theo kết quả câu a), ta có $A\hat{D}I = I\hat{B}K_1$.

Trong ΔBIK_1, ta có:

$$I\hat{K_1}B = 180^0 - I\hat{B}K_1 - K_1\hat{I}B = 180^0 - A\hat{D}I - A\hat{I}D = B\hat{A}D = 90^0$$

$\Leftrightarrow CD \perp BE$, dpcm.

Bài tập 11. Hạ thêm $AH \perp BC$, ta có hình vẽ sau:



Hãy đi chứng minh:

- $\Delta AHC = \Delta CKE$, từ đó suy ra:

  $AH = CK$ và $HC = EK$.

- $\Delta AHB = \Delta BID$, từ đó suy ra:

  $AH = BI$ và $HB = DI$.

Học sinh tự làm tiếp.

CHỦ ĐỀ 4 ĐỊNH LÍ PY-TA-GO

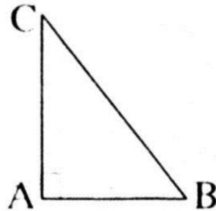
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH LÍ PY – TA – GO

Ta có kết quả (định lí Py — ta — go):

> *Trong tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông.*

Như vậy, với ΔABC vuông tại A ta có:



$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Nhận xét: Từ kết quả của định lí Py - ta - go, chúng ta nhận thấy rằng " *Với mỗi tam giác vuông nếu biết độ dài hai cạnh thì sẽ có được độ dài của cạnh còn lại* ".

Thí dụ 1: Cho ΔABC vuông tại A, biết AB = 4cm, BC = 5cm. Tính độ dài canh AC.

Giải

Vì ΔABC vuông tại A nên:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Leftrightarrow AC = 3cm$$

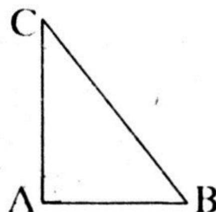
Vậy, ta được AC = 3cm.

2. ĐỊNH LÍ PY – TA – GO ĐẢO

Ta có kết quả (định lí Py — ta — go đảo):

> *Nếu một tam giác có bình phương của một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh còn lại thì tam giác đó là tam giác vuông.*

Như vậy, với ΔABC ta có:



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại A.}$$

Thí dụ 2: Xác định dạng của ΔABC, biết $AB = 0,25cm$, $BC = 0,2cm$, $AC = 0,15cm$.

Giải

Nhận xét rằng:

$$BC^2 + AC^2 = (0,2)^2 + (0,15)^2 = 0,04 + 0,0225 = 0,0625 = (0,25)^2$$
$$= AB^2$$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC vuông tại A, biết $AB = 3cm$, $AC = 4cm$. Tính độ dài cạnh BC.

Giải

Vì ΔABC vuông tại A nên:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Leftrightarrow BC = 5cm$$

Vậy, ta được $BC = 5cm$.

Ví dụ 2: Cho ΔABC nhọn. Vẽ đường cao AH ($H \in BC$). Tính chu vi ΔABC, biết $AC = 13cm$, $AH = 12cm$, $BH = 9cm$.

Giải

Để tính được chu vi ΔABC, chúng ta cần xác định độ dài của AB, BC.

- Trong ΔHAB vuông tại H, ta có:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = 12^2 + 9^2$$
$$= 144 + 81 = 225$$
$$\Leftrightarrow AB = 15cm.$$

- Trong ΔHAC vuông tại H, ta có:

$$CH^2 = AC^2 - AH^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$$
$$\Leftrightarrow CH = 5cm$$
$$\Rightarrow BC = BH + CH = 9 + 5 = 14cm.$$

Khi đó, chu vi ΔABC được cho bởi:

$$CV_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 15 + 14 + 13 = 32cm.$$

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định lí Py - ta - go.

Câu hỏi 2: Phát biểu định lí Py - ta — go đảo.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho ΔABC vuông tại A. Tính độ dài cạnh AC, biết:

a. $AB = 3cm$, $BC = 5cm$.

b. $AB = 8cm$, $BC = 10cm$.

c. $AB = 1cm$, $BC = 1,25cm$.

d. $AB = 0,8cm$, $BC = 1cm$.

Bài tập 2. Cho ΔABC vuông tại A. Tính độ dài cạnh BC, biết:

a. $AB = AC = 2cm$.

b. $AB = 9cm$, $AC = 12cm$.

c. $AB = 12cm$, $AC = 16cm$.

d. $AB = \sqrt{7}$ cm, $AC = \sqrt{2}$ cm.

Bài tập 3. Xác định dạng của ΔABC, biết:

a. $AB = 15cm$, $BC = 20cm$, $AC = 25cm$.

b. $AB = 4cm$, $BC = 4\sqrt{2}$ cm, $AC = 4cm$.

Bài tập 4. Cho ΔABC nhọn. Vẽ đường cao AH ($H \in BC$). Tính chu vi ΔABC, biết $AC = 20cm$, $AH = 12cm$, $BH = 5cm$.

Bài tập 5. Cho hai đoạn thẳng $AC = 16cm$ và $BD = 12cm$. Tính độ dài các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA biết AC và BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Bài tập 6. Trên đường trung trực d của đoạn AB lấy điểm C bất lỳ. Chứng minh rằng:

a. $CA = CB$.

b. Đường thẳng d là phân giác của góc $A\hat{C}B$.

Bài tập 7. Cho góc $x\hat{O}y$. Lấy các điểm A, B theo thứ tự thuộc Ox và Oy sao cho $OA = OB$. Vẽ AH vuông góc với Oy ($H \in Oy$), vẽ BK vuông góc với Ox ($K \in Ox$). Gọi M là giao điểm của AH và BK. Chứng minh rằng:

a. $OH = OK$.

b. OM là tia phân giác của góc $x\hat{O}y$.

Bài tập 8. Cho ΔABC. Các tia phân giác của các góc A và B cắt nhau tại I. Vẽ $IM \perp AB$ ($M \in AB$), $IN \perp BC$ ($N \in BC$), $IP \perp AC$ ($P \in AC$). Chứng minh rằng $IM = IN = IP$.

Bài tập 9. Cho ΔABC có hai góc B, C nhọn. Vẽ phía ngoài ΔABC các tam giác vuông cân ΔABD (cân tại B) và ΔACE (cân tại C). Vẽ DI và EK vuông góc với BC ($I, K \in BC$). Chứng minh rằng:

a. BI = CK.

b. BC = ID + EK.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. AC = 4cm.

b. AC = 6cm.

c. AC = 0,75cm.

d. AC = 0,6cm.

Bài tập 2.

a. $BC = 2\sqrt{2}$ cm.

b. BC = 15cm.

c. BC = 20cm.

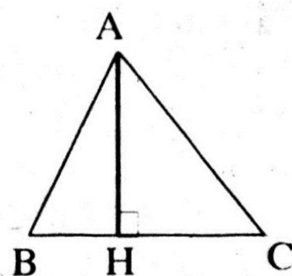
d. BC = 3cm.

Bài tập 3.

a. ΔABC vuông tại B.

b. ΔABC vuông tại A.

Bài tập 4. Để tính được chu vi ΔABC, ta cần xác định độ dài của AB, BC.



- Trong ΔHAB vuông tại H, ta có:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = 12^2 + 5^2$$
$$= 144 + 25 = 169$$
$$\Leftrightarrow AB = 13cm.$$

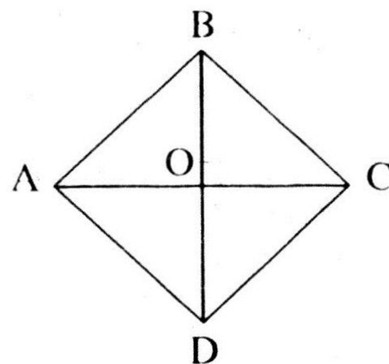
- Trong ΔHAC vuông tại H, ta có:

$$CH^2 = AC^2 - AH^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256$$
$$\Leftrightarrow CH = 16cm$$
$$\Rightarrow BC = BH + CH = 5 + 16 = 21cm.$$

Khi đó, chu vi ΔABC được cho bởi:

$$CV_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 13 + 21 + 20 = 54cm.$$

Bài tập 5. Ta có ngay:



$$OA = \frac{1}{2}AC = 8cm,$$

$$OB = \frac{1}{2}BD = 6cm.$$

Ngoài ra, ta có các tam giác vuông ΔOAB, ΔOBC, ΔOCD, ΔODA bằng nhau, do đó:

$$AB = BC = CD = DA = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10cm.$$

CHỦ ĐỀ 5 CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Chúng ta đã biết được các trường hợp bằng nhau sau của tam giác vuông:

Trường hợp 1: Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

Trường hợp 2: Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

Trường hợp 3: Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

Tiếp theo, chúng ta đi tìm theo một trường hợp bằng nhau nữa của tam giác vuông thông qua thí dụ sau:

Thí dụ 1: Cho ΔABC vuông tại A và $\Delta A_1B_1C_1$ vuông tại A_1, biết $AB = A_1B_1$ và $BC = B_1C_1$. Chứng minh rằng $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Giải

Trong ΔABC vuông tại A, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 = B_1C_1^2 - A_1B_1^2. \quad (1)$$

Trong $\Delta A_1B_1C_1$ vuông tại A_1, ta có:

$$B_1C_1^2 = A_1B_1^2 + A_1C_1^2 \Leftrightarrow A_1C_1^2 = B_1C_1^2 - A_1B_1^2. \quad (2)$$

Từ (1), (2), suy ra:

$$AC^2 = A_1C_1^2 \Leftrightarrow AC = A_1C_1.$$

Khi đó hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$, có:

$AB = A_1B_1$,

$\hat{A} = \hat{A}_1 = 90^0$,

$AC = A_1C_1$.

Suy ra $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (c.g.c).

Vậy, ta có kết quả:

> *Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.*

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

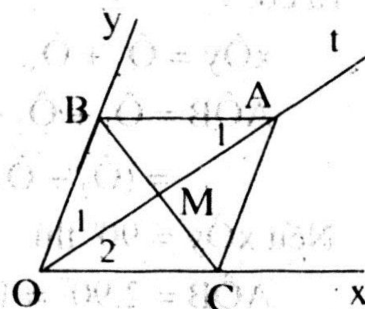
Ví dụ 1: Cho góc xOy khác góc bẹt. Trên tia phân giác Ot của góc xOy lấy điểm A. Gọi M là trung điểm của OA. Đường thẳng qua M vuông góc với OA cắt Ox, Oy theo thứ tự tại B và C. Chứng minh rằng AB // Ox và AC // Oy.

Giải

Từ giả thiết, Ot là tia phân giác của góc $x\hat{O}y$, ta có:

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.

a. Chứng minh AB // Ox.



Xét hai tam giác vuông ΔMAB và ΔMOB, chúng có:

MB chung.

MA = MO, vì M là trung điểm OA

suy ra:

$\Delta MAB = \Delta MOB \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{O}_1 \Leftrightarrow \hat{A}_1 = \hat{O}_2$

$\Leftrightarrow$ AB // Ox, vì có hai góc so le trong bằng nhau.

b. Chứng minh AC // Oy — *Học sinh tự làm.*

Ví dụ 2: Cho góc $x\hat{O}y$ nhọn, M là điểm nằm trong góc đó.

a. Hãy vẽ các điểm A và B sao cho Ox là đường trung trực của MA và Oy là đường trung trực của MB.

b. Chứng minh rằng điểm O thuộc đường trung trực của AB.

c. Tính số đo của góc $A\hat{O}B$, biết $x\hat{O}y = \alpha$.

d. Hãy xác định vị trí của điểm O khi $x\hat{O}y = 90^0$.

Giải

a. Ta thực hiện, như sau:

- Vẽ $MP \perp Ox$, rồi lấy trên tia MP điểm A sao cho PA = PM.
- Vẽ $MQ \perp Oy$, rồi lấy trên tia MQ điểm B sao cho QB = QM.

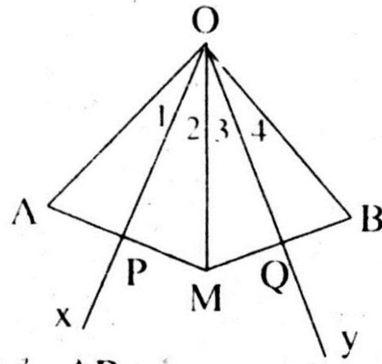
b. Ta có:

- Vì OP là trung trực của AM nên:

$$OM = OA. \quad (1)$$

- Vì OQ là trung trực của BM nên:

$$OM = OB. \quad (2)$$



Từ (1), (2) suy ra:

$OA = OB \Leftrightarrow$ O thuộc đường trung trực của AB.

c. Nhận xét về các cặp tam giác vuông có chung một cạnh và một cạnh khác bằng nhau, ta có:

$\Delta POA = \Delta POM \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$.

$\Delta QOB = \Delta QOM \Rightarrow \hat{O}_3 = \hat{O}_4$.

Ta có:

$x\hat{O}y = \hat{O}_2 + \hat{O}_3$.

$A\hat{O}B = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = (\hat{O}_1 + \hat{O}_4) + (\hat{O}_2 + \hat{O}_3)$

$= (\hat{O}_2 + \hat{O}_3) + (\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 2x\hat{O}y = 2\alpha$.

d. Nếu $x\hat{O}y = 90^0$ thì

$A\hat{O}B = 2.90^0 = 180^0$

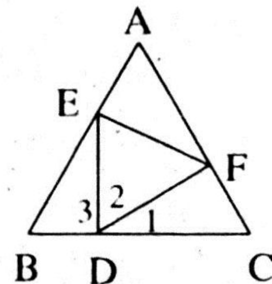
$\Leftrightarrow$ A, O, B thẳng hàng $\Leftrightarrow$ O là trung điểm của AB.

Ví dụ 3: Cho ΔABC đều. Lấy điểm D trên cạnh BC sao cho BC = 3BD. Vẽ DE vuông góc với BC ($E \in AB$), vẽ DF vuông góc với AC ($F \in AC$). Chứng minh rằng ΔDEF là tam giác đều.

Giải

Trong ΔBDE vuông tại D ta có:

$\hat{B} = 60^0 \Rightarrow \hat{D}_3 = 30^0 \Rightarrow BE = 2BD = CD$.



Xét hai tam giác vuông ΔEBD, ΔCDF, ta có:

EB = CD, hai cạnh huyền

$\hat{B} = \hat{C} = 60^0$, cặp góc nhọn

suy ra:

$\Delta EBD = \Delta CDF \Rightarrow DE = DF \Rightarrow \Delta DEF$ cân tại D.

Mặt khác, ta lại có:

$\hat{D}_2 = 180^0 - \hat{D}_1 - \hat{D}_3 = 180^0 — 30^0 — 90^0 = 60^0$.

Vậy, ΔDEF cân có một góc bằng 60^0 nên nó là tam giác đều.

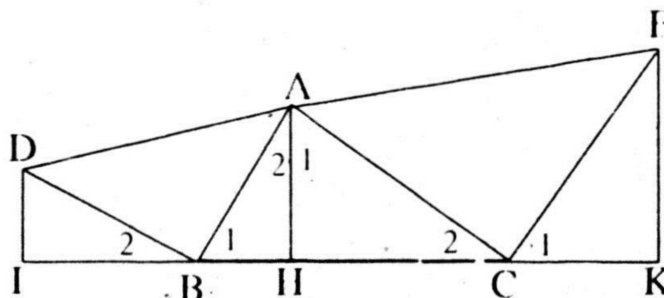
Ví dụ 4: Cho ΔABC có hai góc B, C nhọn. Vẽ phía ngoài ΔABC các tam giác vuông cân ΔABD (cân tại B) và ΔACE (cân tại C). Vẽ DI và EK vuông góc với BC ($I, K \in BC$). Chứng minh rằng:

a. BI = CK.

b. BC = ID + EK.

Giải

Hạ thêm $AH \perp BC$, ta có hình vẽ sau:



Ta lần lượt xét:

- Xét hai tam giác vuông ΔAHC và ΔCKE, ta có:

  AC = CE, vì ΔACE vuông cân tại C

  $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$, hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc

suy ra:

$\Delta AHC = \Delta CKE$ (cạnh huyền và một góc nhọn)

$\Rightarrow AH = CK$ (1)

và HC = EK. (2)

- Xét hai tam giác vuông ΔAHB và ΔBID, ta có:

  AB = BD, vì ΔABD vuông cân tại B

  $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$, hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc

suy ra:

$\Delta AHB = \Delta BID$ (cạnh huyền và một góc nhọn)

$\Rightarrow AH = BI$ (3)

và HB = DI. (4)

a. Từ (1), (3) suy ra BI = CK.

b. Cộng theo vế (2) và (4), ta được:

$HC + HB = EK + DI \Leftrightarrow BC = EK + DI$, đpcm.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Giải thích tại sao lại có được điều kiện " *Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau* "

Câu hỏi 2: Giải thích tại sao lại có được điều kiện " *Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau* ".

Câu hỏi 3: Giải thích tại sao lại có được điều kiện " *Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau* ".

Câu hỏi 4: Giải thích tại sao lại có được điều kiện " *Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau* ".

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Chứng minh rằng:

a. Nếu một tam giác có hai đường cao bằng nhau thì tam giác đó cân

b. Trong tam giác cân, hai đường cao ứng với hai cạnh bên thì bằng nhau.

Bài tập 2. Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

a. Nếu đường cao AH đồng thời là đường trung tuyến thì ΔABC cân tại A.

b. Nếu ΔABC cân tại A thì đường trung tuyến AH cũng đồng thời là đường cao.

Bài tập 3. Cho ΔABC vuông cân tại A Vẽ đường thẳng a qua điểm A sao cho B và C thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ a. Vẽ BH, CK vuông góc với a ($H, K \in a$). Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng:

a. $AH = CK$.

b. $HK = BH + CK$.

c. ΔMHK vuông cân.

Bài tập 4. Cho ΔABC vuông tại A (AB > AC), phân giác BD. Kẻ DH vuông góc với BC ($H \in BC$). Trên tia AC lấy điểm E sao cho AE = AB. Đường thẳng vuông góc với AE tại E cắt DH tại K. Chứng minh rằng:

a. AB = HB.

b. $\widehat{KDB} = 45^0$.

Bài tập 5. Cho góc $x\hat{O}y$ tù, M là điểm nằm trong góc đó.

a. Hãy vẽ các điểm A và B sao cho Ox là đường trung trực của MA và Oy là đường trung trực của MB.

b. Chứng minh rằng điểm O thuộc đường trung trực của AB.

c. Tính số đo của góc $A\hat{O}B$, biết $x\hat{O}y = \alpha$.

d. Hãy xác định vị trí của điểm O khi $x\hat{O}y = 90^0$.

Bài tập 6. Cho ΔABC. Vẽ phía ngoài ΔABC các tam giác vuông cân ở A là ΔABD và ΔACE. Vẽ AH vuông góc với BC, đường thẳng AH cắt DE ở K. Vẽ DM và EN vuông góc với AH ($M, N \in AH$). Chứng minh rằng:

a. DM = EN.

b. DK = EK.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Xét hai tam giác vuông ΔBNC và ΔCPB, ta có:

BC chung

BN = CP, giả thiết

suy ra:

$\Delta BNC = \Delta CPB$ (cạnh góc vuông — cạnh huyền)

$\Rightarrow \widehat{BCN} = \widehat{CBP} \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại A.



TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Sách giáo khoa Toán 7 - Nhà xuất bản Giáo dục.
2. Sách giáo khoa Bài tập Toán 7 - Nhà xuất bản Giáo dục.
3. Vũ Hữu Bình - Toán cơ bản và nâng cao Hình học 7 — Nhà xuất bản Đà Nẵng.
4. Vũ Hữu Bình - Toán cơ bản và nâng cao Đại số 7 — Nhà xuất bản Đà Nẵng.

LỜI CUỐI

Nhóm Cự Môn luôn sẵn lòng giải đáp mọi thắc mắc của các em học sinh và độc giả về nội dung của cuốn tài liệu này.

Mọi chi tiết xin liên hệ trực tiếp tới:

TRUNG TÂM HỖ TRỢ PHỔ CẬP SÁCH TOÁN

THCS VÀ THPT

VỚI ƯU ĐÃI CỦA NHÓM CỰ MÔN

Chịu trách nhiệm chính: **Thạc sĩ Toán học - Kỹ sư Tin học Lê Hồng Đức**.

Các thành viên chính thức của nhóm:

1. Nhà giáo ưu tú Đào Thiện Khải - Nguyên Hiệu Trưởng Trường THPT Hà Nội - Amsterdam.
2. Lê Hữu Trí.
3. Lê Bích Ngọc.

Phổ cập phương pháp dạy và học

" LẤY HỌC TRÒ LÀM TRUNG TÂM "

Địa chỉ: Số nhà 20 Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ - Hà Nội
Điện thoại: (04) 7196671 hoặc 0983046689
E-mail: cumon@hn.vnn.vn hoặc lehongduc39@yahoo.com

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại : (04) 9 714898 – (04) 9 724770 – Fax: (04) 9 714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc : PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập : NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập
Minh Hải

Chế bản
NS. Bình Thạnh

Trình bày bìa
Xuân Duyên

Tổng phát hành : Công ty TNHH DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG VIỆT
Địa chỉ : 374 Xô Viết Nghệ Tĩnh P.25 – Q.BT – TP.HCM
ĐT: 5117907 – Fax: 8999898
Email: binhthanhbookstore@yahoo.com

ĐỂ HỌC TỐT TOÁN 7 TẬP 1
Mã số : 1L – 217 ĐH2007
In 3.000 cuốn, khổ 16×24 cm, tại Công ty in VIỆT HƯNG.
Số xuất bản : 729 – 2007/CXB/14 – 110/ĐHQGHN ngày 07/09/2007.
Quyết định xuất bản số : 485 LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2007.